# Giải Một Số Bài Toán Hình Học Phẳng Nhờ Phép Quay Trong Geogebra

Nguyễn Hoàng Vũ (Viện Sinh thái môi trường Đông Dương, Hà Nội)
Vũ Thị Thu Hà (Trường Trung học Phổ thông Phạm Hồng Thái, Hà Nội)
Chu Thị Minh Châu (Trường Trung học Phổ thông Quang Trung, Hà Nội)
Tạ Duy Phượng (Cộng tác viên Viện Toán học)
Phạm Văn Hoằng, Trần Lê Thủy (Đại học Giáo dục, Đại học Quốc gia Hà Nội)

## 1. Đặt vấn đề

Các phép biến hình có vai trò quan trọng trong dạy và học toán. Nó chiếm một thời lượng đáng kể trong chương trình toán phổ thông chuyên. Bài viết này minh họa cách sử dụng GeoGebra trong giải toán hình học phẳng nhờ phép quay. Các ví dụ được lấy chủ yếu từ tài liệu [10] và các tài liệu thi Olympic.

## 2. Một số tính chất cơ bản của phép quay

Định nghĩa 1. *Phép quay tâm $O$ (hay quanh tâm $O$) một góc $\alpha$ là phép biến hình trên mặt phẳng biến điểm $X$ thành điểm $X'$ sao cho*

*(a)* $OX' = OX$.

*(b) Góc quay từ vectơ* $\overrightarrow{OX}$ *tới vectơ* $\overrightarrow{OX'}$ *bằng* $\alpha$.

Phép quay quanh tâm $O$ một góc $\alpha$ thường được kí hiệu là $R_O^\alpha$ (rotation) hoặc $Q_\alpha^O$ (quay).

Tính chất 1. *Phép quay biến đường tròn thành đường tròn.*

Định nghĩa 2. *Tích của hai phép biến hình $G$ và $F$ được kí hiệu là $F \circ G$, được hiểu là*

$$(F \circ G)(X) = F(G(X)).$$

Tính chất 2. *Tích của hai phép quay $R_B^{\beta}$ và $R_A^{\alpha}$ với $\alpha + \beta \neq k360^\circ$ là một phép quay $R_C^{\gamma} := R_B^{\beta} \circ R_A^{\alpha}$, với $\gamma = \alpha + \beta$ và $\angle BAC = \frac{\alpha}{2}$, $\angle ABC = \frac{\beta}{2}$.*

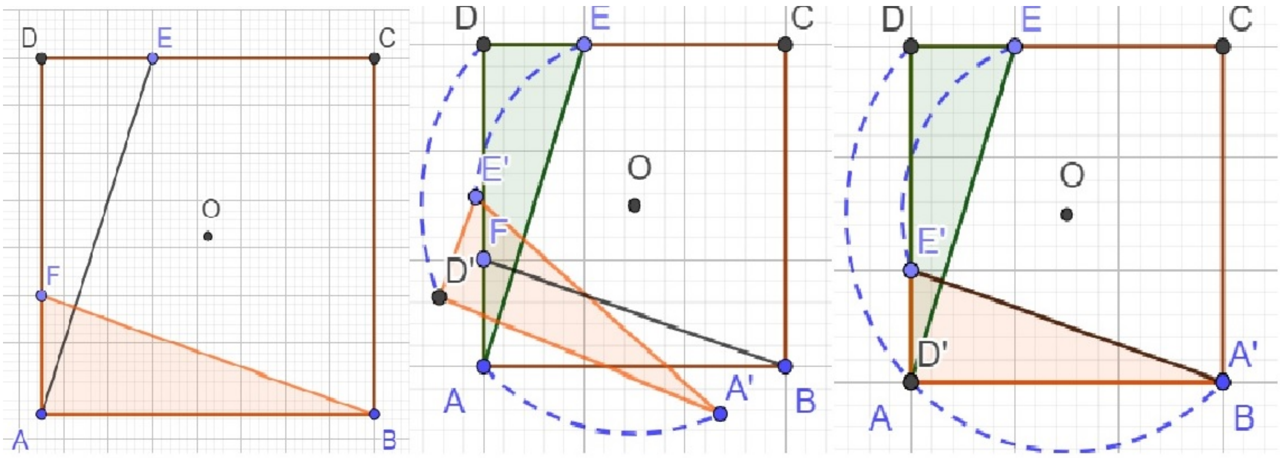
Chú ý. Trong mỗi bài toán, chúng tôi thường trích xuất ba hình từ GeoGebra

- Hình thứ nhất bên trái, kí hiệu là Hình a), là đề bài.
- Hình thứ hai ở giữa, kí hiệu là Hình b) là hình trung gian (đang thực hiện phép quay).
- Hình thứ ba bên phải, kí hiệu là Hình c) là hình cuối cùng (kết quả của phép quay).

Bạn đọc có thể tự mình vẽ và thực hiện phép quay trên giấy hoặc trên GeoGebra hoặc tham khảo các files .ggb (file GeoGebra) trên trang web của: https://www.geogebra.org/m/vaxnmyfq

## 3. Một số bài toán sử dụng phép quay và GeoGebra

Bài toán 1. *Trên các cạnh $CD$ và $DA$ của hình vuông $ABCD$ lần lượt chọn các điểm $E$ và $F$ sao cho $DE = AF$. Chứng minh rằng hai đường thẳng $AE$ và $BF$ vuông góc với nhau.*

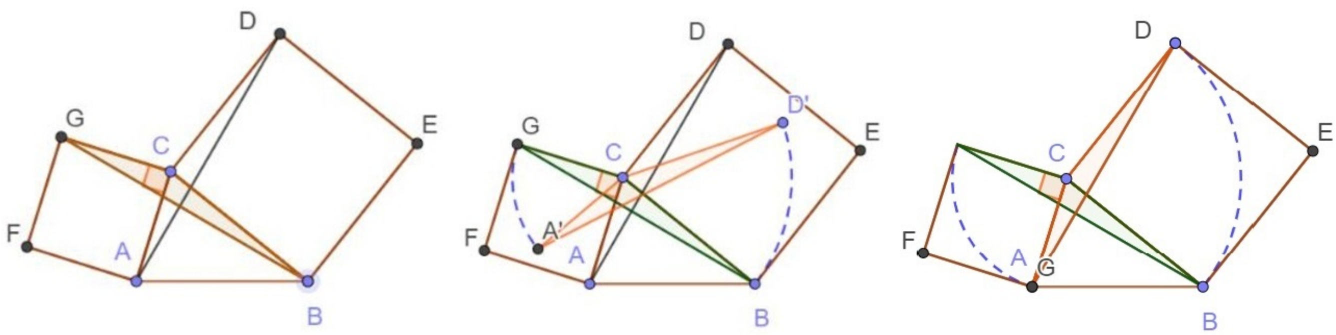



Hình 1

Lời giải. Gọi $O$ là tâm hình vuông. Quay hình vuông quanh điểm $O$ một góc $90°$ ngược kim đồng hồ. Khi ấy các điểm $A, B, C, D$ biến thành các điểm $B, C, D, A$ (Hình 1b và Hình 1c). Vì $DE = AF$ nên $E$ trùng với $F$ hay $AE$ là ảnh của $BF$ sau phép quay góc $90°$ ngược kim đồng hồ. Vậy $BF$ vuông góc với $AE$.

Thay đổi điểm $E$ và điểm $F$ trên $CD$ và $DA$ sao cho ta vẫn có $DE = AF$. Và thực hiện lại thao tác phép quay, ta vẫn có $BF$ vuông góc với $AE$. □

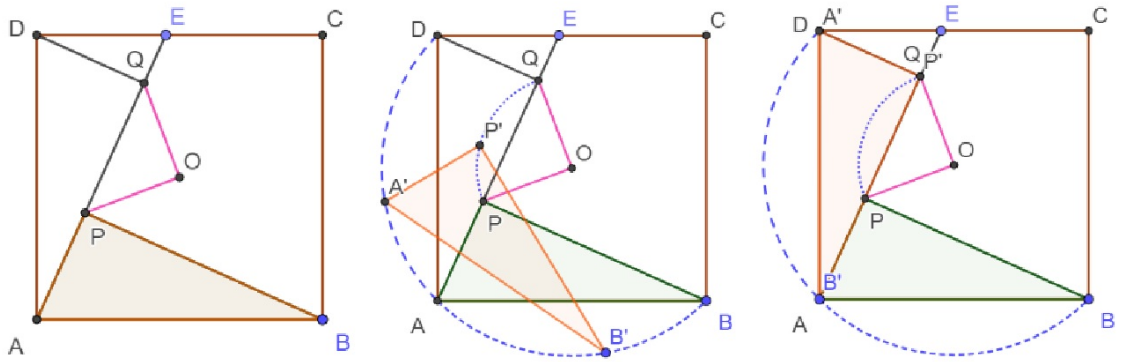
Bài toán 2. *Trên các cạnh $BC$ và $AC$ của tam giác $ABC$ dựng ra phía ngoài của tam giác hai hình vuông $BCDE$ và $ACGF$. Chứng minh rằng các đoạn thẳng $AD$ và $BG$ bằng nhau và vuông góc với nhau.*




Hình 2

Lời giải. Quay tam giác $GBC$ quanh điểm C một góc $90°$ ngược kim đồng hồ. Điểm $G$ biến thành điểm $A$, điểm $B$ biến thành điểm $D$. Cạnh $CG$ trở thành cạnh $CA$, cạnh $CB$ trở thành cạnh $CD$, đoạn $GB$ trở thành đoạn $AD$. Vậy hai đường $AD$ và $BG$ vuông góc với nhau. □

Bài toán 3. *Gọi $O$ là tâm hình vuông $ABCD$ và $E$ là điểm bất kì trên đoạn thẳng $CD$. Các điểm $P$ và $Q$ là hình chiếu vuông góc của $B$ và $D$ lên đường thẳng $AE$. Chứng minh rằng tam giác $POQ$ là tam giác vuông cân.*

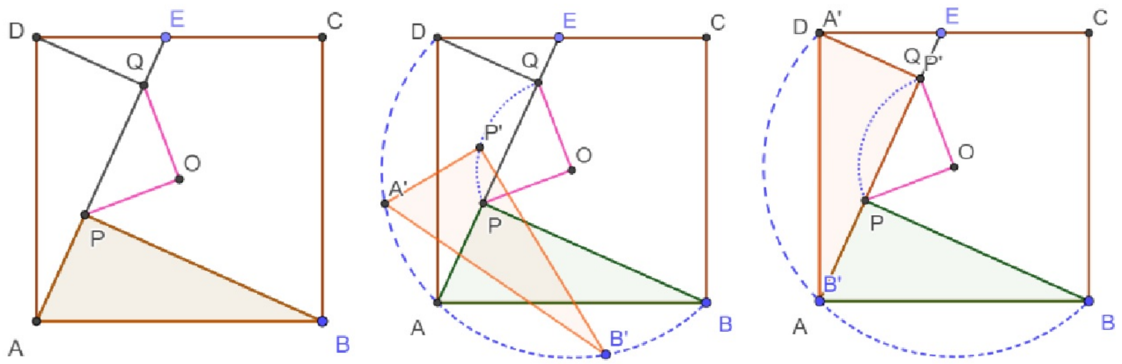



Hình 3

Lời giải. Quay tam giác $APB$ quanh điểm $O$ một góc 90° cùng chiều kim đồng hồ. Điểm $A$ trở thành điểm $D$, điểm $B$ trở thành điểm $A$, cạnh $BA$ trở thành cạnh $AD$, điểm $P$ trở thành điểm $Q$. Suy ra $OP = OQ$. Vì phép quay góc 90° nên tam giác $POQ$ là tam giác vuông cân tại .$O$

Thay đổi vị trí điểm $E$ trên $CD$. Thực hiện lại thao tác quay, ta vẫn có $POQ$ là tam giác vuông cân tại $O$. □

Bài toán 4. *Gọi $O$ là tâm hình vuông $ABCD$ và $E$ là điểm bất kì trên đoạn thẳng $CD$. Các điểm $P$ và $Q$ là hình chiếu vuông góc của $B$ và $D$ lên đường thẳng $AE$. Chứng minh rằng tam giác $POQ$ là tam giác vuông cân.*



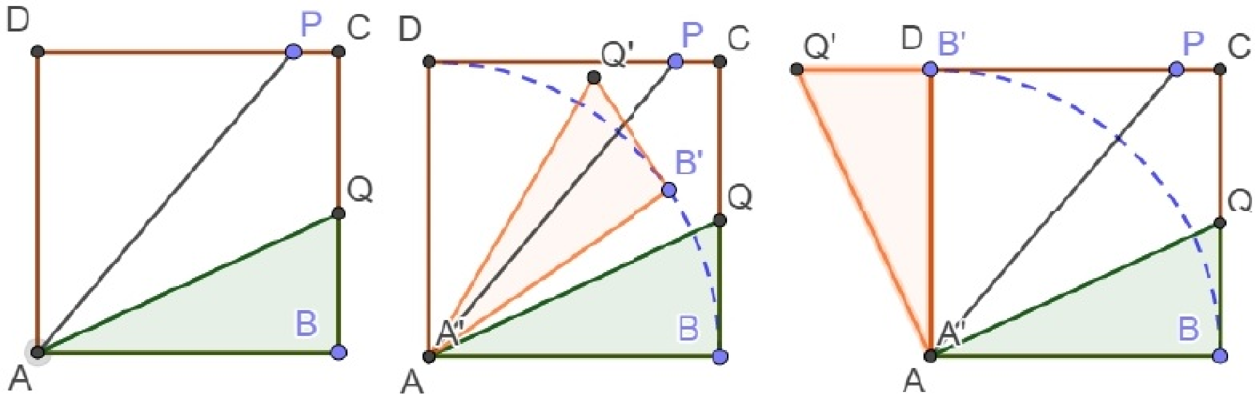

Hình 4

Lời giải. Quay tam giác $APB$ quanh điểm $O$ một góc 90° cùng chiều kim đồng hồ. Điểm $A$ trở thành điểm $D$, điểm $B$ trở thành điểm $A$, cạnh $BA$ trở thành cạnh $AD$, điểm $P$ trở thành điểm $Q$. Suy ra $OP = OQ$. Vì phép quay góc 90° nên tam giác $POQ$ là tam giác vuông cân tại $O$.

Thay đổi vị trí điểm $E$ trên $CD$. Thực hiện lại thao tác quay, ta vẫn có $POQ$ là tam giác vuông cân tại $O$.

□

Bài toán 5. *Điểm $P$ nằm trên cạnh $CD$ của hình vuông $ABCD$. Phân giác của góc $BAP$ cắt cạnh $BC$ tại $Q$. Chứng minh rằng $BQ + DP = AP$.*




Hình 5

Lời giải. Quay tam giác $AQB$ quanh điểm $A$ một góc 90° ngược chiều kim đồng hồ (Hình 4b và Hình 4c). Điểm $B$ trở thành điểm $D$, cạnh $AB$ trở thành cạnh $AD$, điểm $Q$ trở thành điểm $Q'$ nằm trên tia đối của $DC$. Do $AQ$ là phân giác của $\angle BAP$ nên

$$\angle PQ'A = 90^\circ - \angle DAQ' = \angle DAP + \angle PAB - \angle DAQ' = \angle DAP + \angle DAQ' = \angle PAQ',$$

hay tam giác $Q'PA$ cân đỉnh $P$. Chứng tỏ

$$BQ + DP = DQ' + DP = PQ' = AP.$$

Thay đổi vị trí điểm $P$ trên $CD$. Thực hiện lại thao tác quay, ta vẫn có $BQ + DP = AP$. □

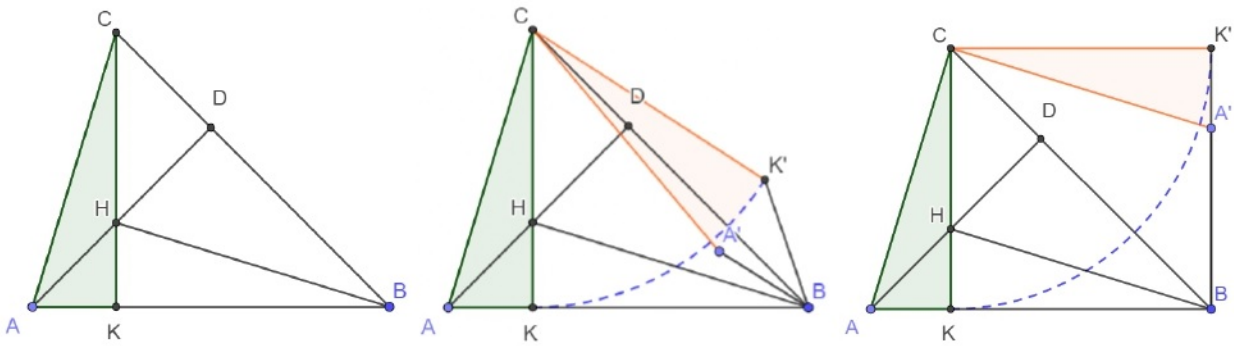
Nhận xét. Tất nhiên, có thể giải bài này mà không dùng ngôn ngữ phép quay: Trên tia đối của $DC$ dựng $DQ' = BQ$. Hai tam giác $ADQ'$ và $ABQ$ bằng nhau (hai tam giác vuông có hai cặp cạnh góc vuông tương ứng bằng nhau). Suy ra

$$\measuredangle PQ'A = 90^\circ - \angle DAQ' = (\angle PAD + 2\angle BAQ) - \angle DAQ' = \angle PAD + \angle DAQ' = \angle PAQ'.$$

Chứng tỏ tam giác $APQ'$ cân đỉnh $P$. Vậy

$$AP = PQ' = DP + DQ' = BQ + DP.$$

Tuy nhiên, ý tưởng "*quay*" có vẻ tự nhiên hơn ý tưởng trên tia đối của $DC$ đặt $DQ' = BQ$.




Hình 6

Bài toán 6. *Cho tam giác nhọn $ABC$ với $\angle ABC = 45°$. Các đường cao hạ từ đỉnh $A$ và $C$ gặp nhau tại $H$. Chứng minh rằng $BH = CA$.*

Lời giải. Quay tam giác $CKA$ quanh điểm $C$ một góc $90°$ ngược kim đồng hồ. Đoạn $CK$ trở thành đoạn $CK'$ vuông góc với $CK$, điểm $A$ trở thành điểm $A'$. Đoạn $CA$ trở thành đoạn $CA'$ vuông góc với $CA$. Do $\angle ABC = 45°$ nên $CK' = CK = BK$ và $\angle CKB = \angle KCK' = 90°$ nên $CKBK'$ là hình vuông. Do $\angle K'CA' = \angle KCA = \angle HBK$ nên $\angle A'CB = \angle HBC$. Do đó $CA' // BH$ và $CKBA'$ là hình bình hành. Suy ra $BH = CA' = CA$. □

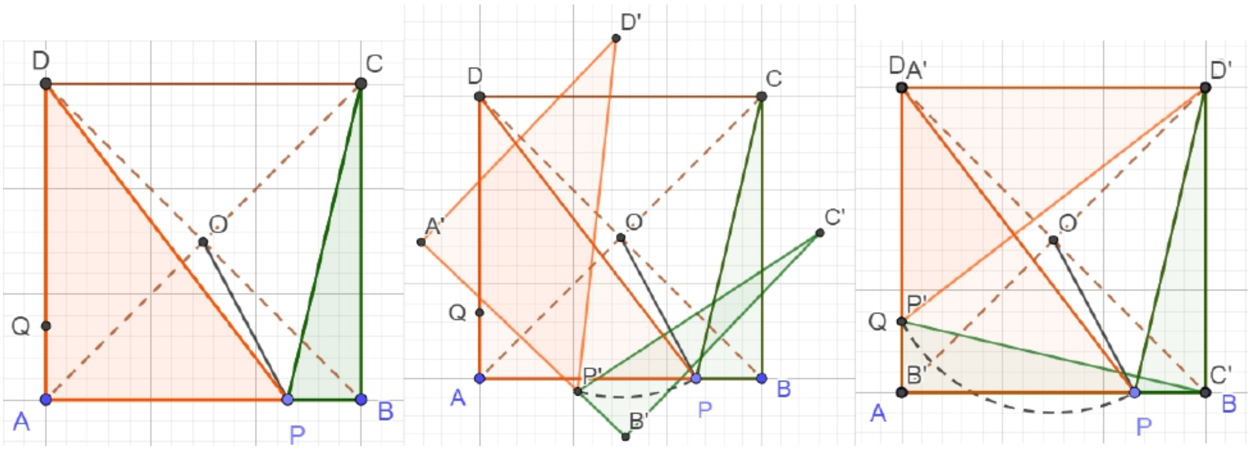
Nhận xét 1. Có thể chứng minh trực tiếp không dùng phép quay như sau: Do $\angle ABC = 45°$ nên $CKB$ là tam giác vuông cân hay $CK = BK$. Mặt khác, $\angle ACK = \angle HBK$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc). Chứng tỏ $\Delta ACK = \Delta HBK$. Do đó $CA = BH$.

Nhận xét 2. Ta có $\angle ABC = 45°$ khi và chỉ khi $CA = BH$. Thật vậy, nếu $CA = BH$ thì $\Delta CAK = \Delta BHK$. Suy ra $CK = BK$ hay $CKB$ là tam giác vuông cân. Do đó $\angle ABC = \angle KBC = 45°$.

Bài toán 7. *Trên các cạnh $AB$ và $AD$ của hình vuông $ABCD$ lần lượt chọn các điểm $P$ và $Q$ sao cho $AP = DQ$. Chứng minh rằng $\angle PBQ + \angle PCQ + \angle PDQ = 90°$.*

Lời giải. Quay tam giác $DAP$ và tam giác $CBP$ quanh điểm $O$ góc $90°$ cùng chiều kim đồng hồ (Hình 6b và Hình 6c). Điểm $D$ biến thành điểm $C$, điểm $A$ biến thành điểm $D$, điểm $B$ biến thành điểm $A$, điểm $C$ biến thành điểm $B$. Góc $ADP$ trở thành góc $DCQ$ và góc $PCB$ trở thành góc $QBA$. Suy ra

$$\angle PBQ + \angle PCQ + \angle PDQ = \angle ABQ + \angle PCQ + \angle PDA$$

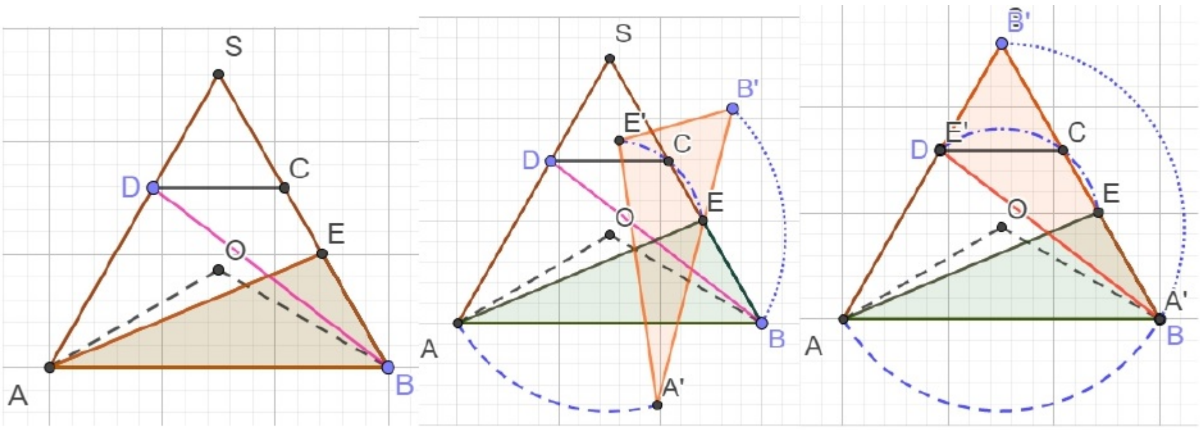



Hình 7

$$= \angle BCP + \angle PCQ + \angle QCD = \angle BCD = 90^\circ.$$

Thay đổi vị trí điểm $P$ và $Q$ trên $AB$ và $AD$ sao cho $AP = DQ$. Thực hiện lại thao tác quay, ta vẫn có $\angle PBQ + \angle PCQ + \angle PDQ = 90^\circ$. □

Bài toán 8. *Cho hình thang $ABCD$ với các cạnh đáy $AB$ và $CD$ thỏa mãn điều kiện: $\angle BAD = \angle ABC = 60^\circ$ và $CD < BC$. Trên cạnh $BC$ lấy điểm $E$ sao cho $BE = CD$. Chứng minh rằng $AE = BD$ và góc giữa chúng bằng $60^\circ$.*




Hình 8

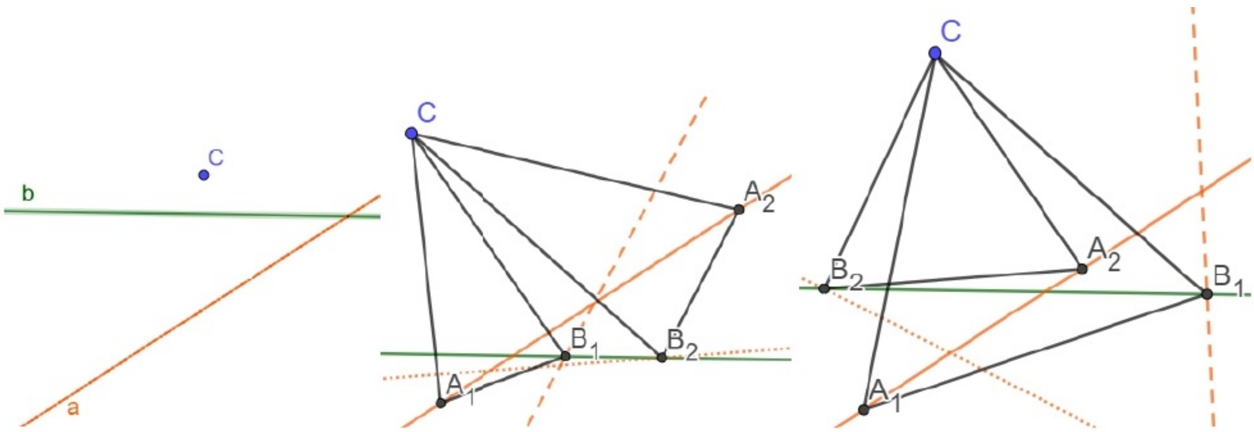
Lời giải. Kéo dài $AD$ và $BC$ cắt nhau tại $S$. Vì $\angle BAD = \angle ABC = 60^\circ$ nên $SAB$ là tam giác đều. Gọi $O$ là tâm tam giác $SAB$. Khi ấy $\angle AOB = \angle BOS = \angle SOA = 120^\circ$. Do $AB//CD$ nên $SDC$ cũng là tam giác đều. Do đó $SD = CD = BE$. Quay tam giác $ABE$ quanh điểm $O$ một góc $120^\circ$ ngược kim đồng hồ.

Qua phép quay này thì điểm $A$ biến thành điểm $B$, điểm $B$ biến thành điểm $S$ và điểm $E$ biến thành điểm $D$. Như vậy đoạn $BD$ là ảnh của đoạn $AB$ qua phép quay $120°$. Vậy $AE = BD$ và góc tù giữa chúng bằng $120°$ hay góc nhọn giữa chúng bằng $60°$.

Thay đổi vị trí điểm $D$ và điểm $C$ sao cho $ABCD$ vẫn là hình thang cân có góc ở đáy bằng $60°$. Thực hiện lại thao tác quay, ta vẫn có $AE = BD$ và góc giữa chúng bằng $60°$. □

Phép quay cũng có thể giúp giải các bài toán dựng hình như minh họa trong bài tập dưới đây.

Bài toán 9. *Cho hai đường thẳng $a$ và $b$ cắt nhau và một điểm $C$ không thuộc hai đường thẳng này. Hãy dựng hai điểm $A$ và $B$ tương ứng trên $a$ và $b$ sao cho $ABC$ là tam giác đều.*




Hình 9

Lời giải. Gọi $A$ là một điểm bất kì trên đường thẳng $a$. Để tìm điểm $B$ trên $b$ sao cho $ABC$ là tam giác đều, ta cần quay $a$ quanh điểm $C$ góc $60°$ cùng chiều hoặc ngược chiều kim đồng hồ. Gọi $a_1$ và $a_2$ lần lượt là ảnh của $a$ qua phép quay quanh điểm $C$ góc $60°$.

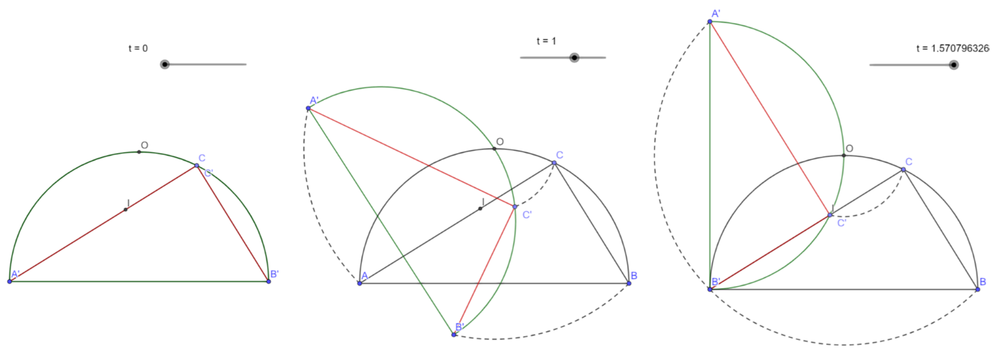
Khi $A$ chạy trên đường thẳng $a$, ảnh của $A$ qua phép quay góc $60°$ chạy trên đường thẳng $a_1$ và $a_2$. Ảnh của điểm $A$ cần tìm chính là điểm $B$, là giao điểm của $a_1$ (hoặc $a_2$) với đường thẳng $b$.

Như vậy, để dựng tam giác đều $ABC$ ta quay đường thẳng $a$ góc $60°$ quanh điểm $C$ theo cả hai hướng (cùng chiều và ngược chiều kim đồng hồ), được đường thẳng $a_1$ và $a_2$. Gọi $B_1$ và $B_2$ là giao điểm của đường thẳng $a_1$ và $a_2$ với đường thẳng $b$. Để xác định các điểm $A_1$ và $A_2$ ta chỉ cần quay điểm $B_1$ và $B_2$ góc $60°$ quanh điểm $C$ lần lượt ngược chiều và cùng chiều kim đồng hồ. Bài toán nói chung có hai nghiệm. □

Biện luận. Nếu một trong hai đường thẳng $a_1$ hoặc $a_2$ trùng với đường thẳng $b$ thì bài toán sẽ có vô số lời giải. Nếu một trong hai đường thẳng $a_1$ hoặc $a_2$ song song với đường thẳng $b$ thì bài toán sẽ có duy nhất một lời giải.

Có thể dùng phép quay để giải các bài toán qũi tích như minh họa trong bài tập dưới đây.

Bài toán 10. *Cho nửa đường tròn đường kính $AB$. Điểm $C$ chuyển động trên nửa đường tròn. Tìm tập hợp các điểm $I$ trên tia $AC$ sao cho $AI = BC$.*




Hình 10

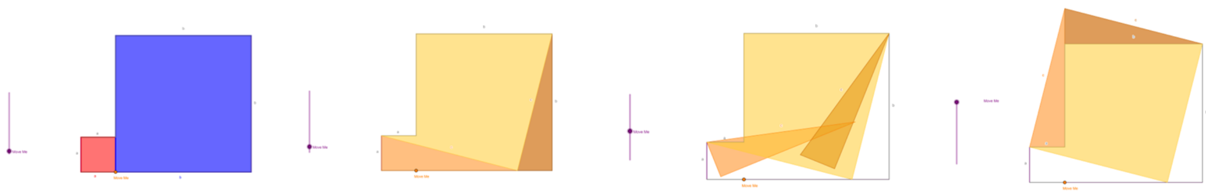
Lời giải. Giả sử $O$ là điểm chính giữa cung $AB$. Phép quay tâm $O$ góc 90° theo chiều kim đồng hồ biến điểm $B$ thành điểm $A$, điểm $A$ biến thành điểm $A_1$ mà $AA_1 \perp AB$ và $AA_1 = AB$, điểm $C$ biến thành điểm $I$, đoạn thẳng $BC$ thành đoạn $AI$, đoạn $AC$ thành $A_1I$. Suy ra $\angle AIA_1 = \angle BCA = 90°$. Ảnh của nửa đường tròn đường kính $AB$ chính là đường tròn đường kính $AA_1$. Suy ra khi $C$ di động trên nửa đường tròn đương kính $AB$ thì $I$ di động trên nửa đường tròn đường kính $AA_1$. □

# 4. Chứng minh định lí Pythagoras nhờ phép quay

Có khoảng 400 chứng minh định lí Pythagoras, trong đó có một số chứng minh nhờ phép quay. Các chứng minh này dễ dàng minh họa trên GeoGebra.

Định lý 1. *(Định lý Pythagoras) Cho tam giác $ABC$ vuông ở $C$ có các cạnh tương ứng là $a, b, c$. Khi ấy $c^2 = a^2 + b^2$.*

Chứng minh 1. (Thabit Ibn Qurra, 836 – 901) Đầu tiên vẽ hai hình vuông cạnh $a$ và $b$. Tổng diện tích hai hình vuông bằng $a^2 + b^2$. Vẽ hai tam giác vuông $ABC$ và $ADE$. Quay tam giác



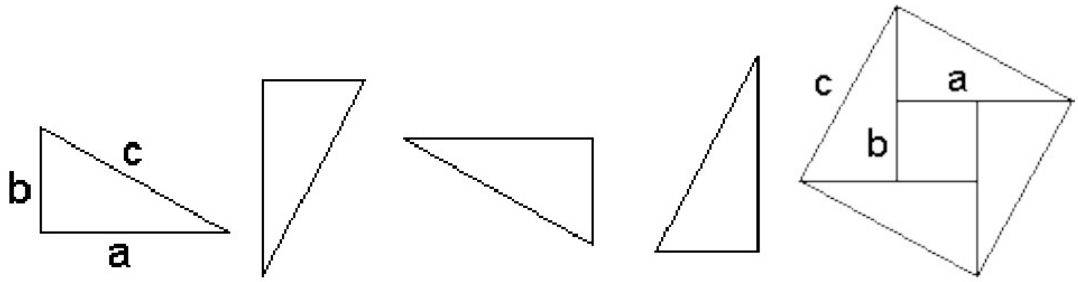
Hình 11

$ABC$ và $ADE$ góc $90^o$ ngược chiều kim đồng hồ quanh tâm$B$ và tâm $E$ tương ứng, được ảnh là tam giác $BCA'$ và tam giác $ED'A'$. Như vậy, hai hình vuông có tổng diện tích $a^2 + b^2$. đã được biến đổi thành hình vuông có diện tích $c^2$ hay $c^2 = a^2 + b^2$.

Có thể thay đổi vị trí điểm $A$, thí dụ, để được tam giác $ABC$ mới với $a > b$. Ta vẫn luôn luôn có $c^2 = a^2 + b^2$. □

Có thể kết hợp phép quay và phép tịnh tiến để chứng minh định lí Pythagoras như dưới đây.

Chứng minh 2. Quay tam giác $ABC$ (diện tích $\frac{1}{2}ab$) góc 90°, 180°, 270°.




Hình 12

Sắp xếp lại (tịnh tiến) bốn tam giác vuông. Ta được một hình vuông cạnh $c$ bằng một hình vuông cạnh $a - b$ và bốn hình tam giác vuông cạnh $a$ và $b$. Ta có

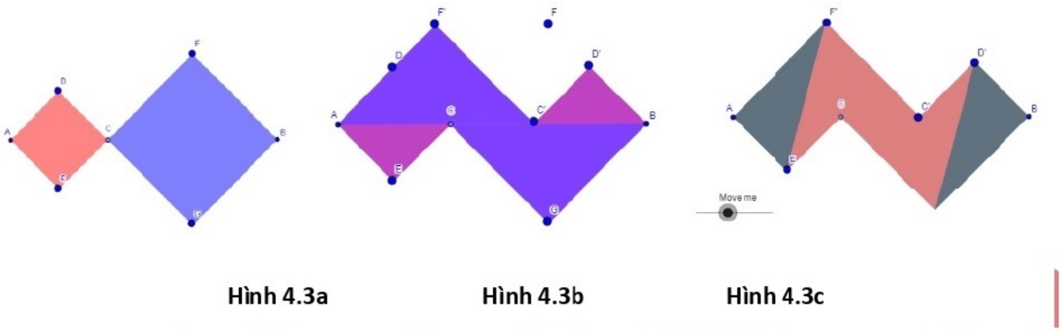
$$c^2 = (a-b)^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = a^2 - 2ab + b^2 + 2ab = a^2 + b^2.$$

□

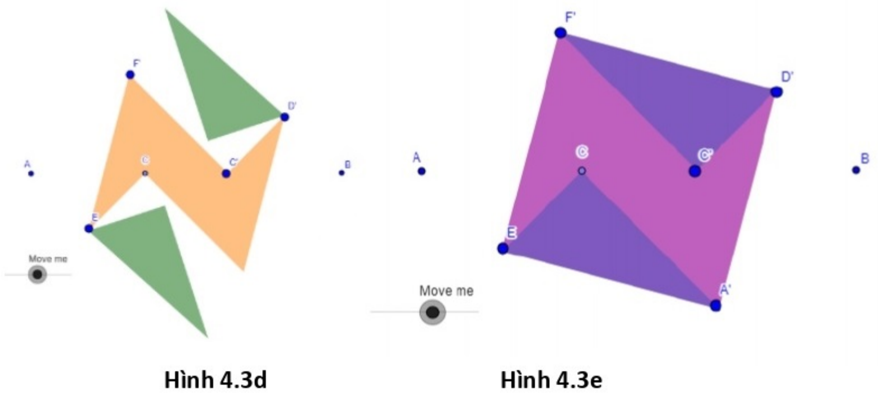
Chứng minh 2. Dựng hai hình vuông $AECD$ cạnh $a$ và $CGBF$ cạnh $b$. Tịnh tiến hai tam giác $ACF$ và $CBF$ dọc theo đường $AB$ để được hai tam giác $C'BD'$ và $AC'F'$

$$c^2 = (a-b)^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = a^2 - 2ab + b^2 + 2ab = a^2 + b^2.$$

Trong hình đánh dấu hai tam giác $AF'E$ và $BGD'$




Hình 13



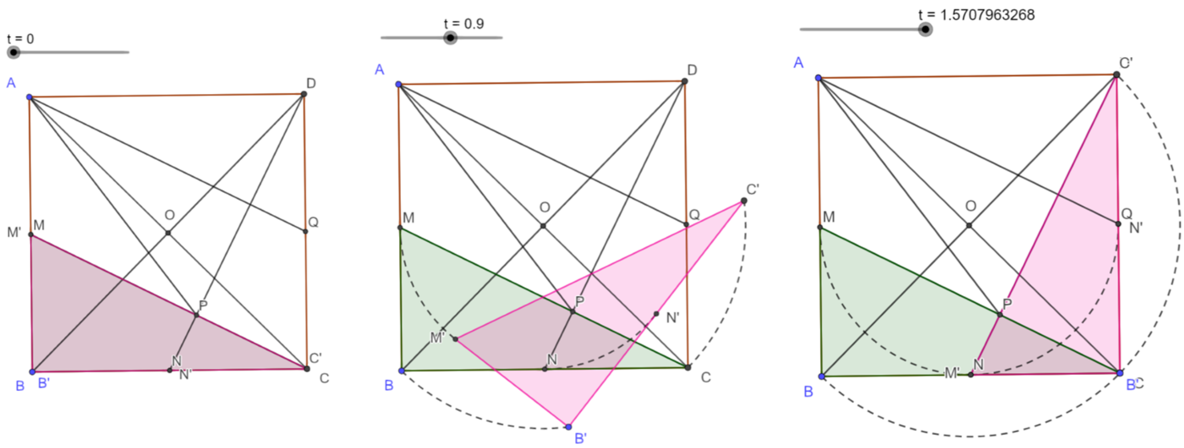

Hình 14

Quay tam giác $AF'E$ quanh điểm $E$ và tam giác $BGD'$ quanh điểm $D'$ góc $90°$ ngược kim đồng hồ để được tam giác $A'FE$ và tam giác $D'CF$.

Ta có Hình 4.3d và Hình 4.3e, chính là hình vuông cạnh $c$. Như vậy, ta có $c^2 = a^2 + b^2$. □

## 5. Một số bài tập sử dụng phép quay và GeoGebra

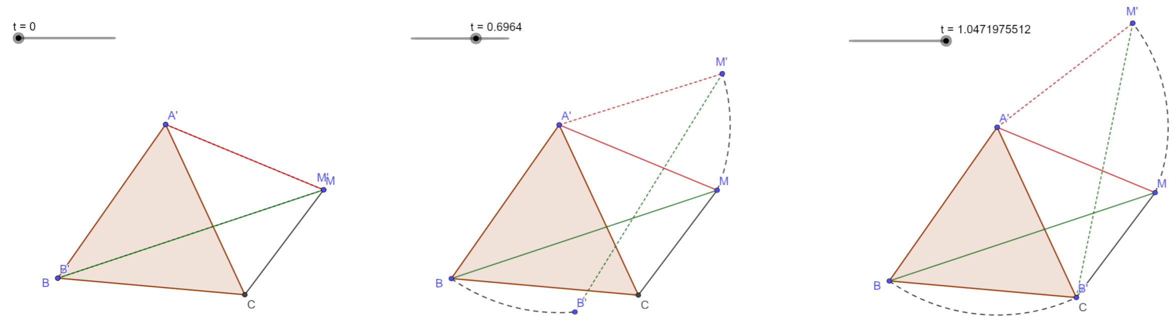
Bài tập 1. Các điểm $M$ và $N$ là các trung điểm của các cạnh $AB$ và $BC$ của hình vuông $ABCD$. Các đoạn $DN$ và $CM$ cắt nhau tại $P$. Chứng minh rằng đoạn $PA$ bằng cạnh hình vuông.




Hình 15

Lời giải. Dùng phép quay tâm $O$ góc quay $90°$ ngược chiều kim đồng hồ, khi đó $A, B, C, D$ tương ứng biến thành $B, C, D, A$. $M$ biến thành $N$, $N$ biến thành $Q$ (điểm giữa đoạn $CD$). Đoạn $MC$ biến thành $ND$, do đó $MC \perp ND$. Đoạn $ND$ biến thành $QA$ nên $ND \perp AQ$ và vì vậy $AQ // CM$. Giả sử $H$ là giao điểm của đoạn $AQ$ và $DP$. Khi ấy do $Q$ là điểm giữa đoạn $DC$ nên $H$ là điểm giữa đoạn $DP$. Đoạn $AH$ vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến của tam giác $APD$ nên tam giác $APD$ cân và do đó $AP = AD$. □

Bài tập 2. Cho tam giác đều $ABC$. $M$ là một điểm tùy ý trên mặt phẳng. Chứng minh rằng độ dài một đoạn bất kì trong ba đoạn $MA, MB, MC$ không lớn hơn tổng hai đoạn còn lại. Khi nào thì xảy ra dấu bằng?




Hình 16

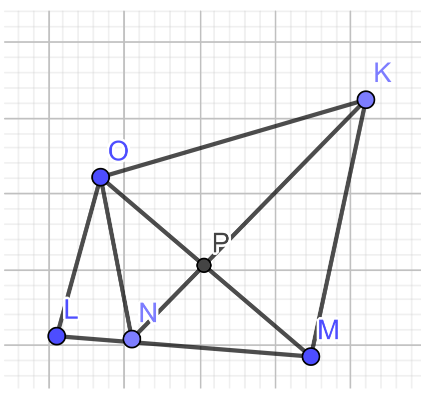
Lời giải. Cố định $MC$ và thay các đoạn thẳng $MA$, $MB$ bởi các đoạn thẳng là ảnh của chúng qua phép quay tâm $A$ góc quay $60°$. Khi ấy điểm $M$ biến thành điểm $M'$, $B$ biến thành $C$, $BM$ biến thành $CM'$.

Tam giác $AMM'$ đều, suy ra $MM' = AM$. Từ tam giác $MCM'$ ta có $MC + CM' > MM'$ hay $MB + MC > MA$. Tương tự, $BM + MA > MC$, $MC + MA > MB$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M', C, M$ thẳng hàng. Lúc đó $\angle AMC = \angle AM'C = 60°$ hay $M$ thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$. □

## 6. Một số bài toán thi Olympic sử dụng phép quay có thể minh họa trên GeoGebra

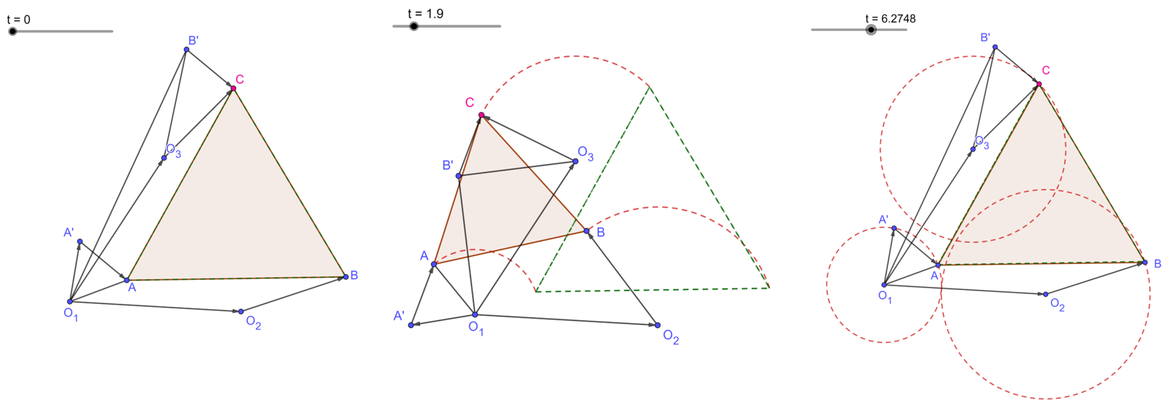
Bài toán 11 (Olympic Lomonosov, Nga, 2014). *Tam giác $LOM$ với góc $\angle LOM = \alpha$ được quay quanh $O$ một góc nhọn. Điểm $L$ biến thành điểm $N$ nằm trên đường $LM$, điểm $M$ biến thành điểm $K$ sao cho $OM \perp NK$. Tìm số đo góc quay.*




Hình 17

Lời giải. Kí hiệu góc quay là $\phi$. Khi ấy $\angle LON = \angle MOK = \phi$. Vì $ON = OL$ (tính chất của phép quay) nên $\angle OLN = \angle ONL = 90^\circ - \phi/2$. Do hai tam giác $LOM$ và $NOK$ bằng nhau (tính chất của phép quay) nên $\angle ONK = \angle OLN = 90^\circ - \phi/2$. Theo giả thiết, $OM \perp NK$ nên $\angle NOP = 90^\circ - \angle ONK = \phi/2$. Hay $\alpha = 3\phi/2$, nghĩa là $\phi = 2\alpha/3$. □

Bài toán 12 (Olympic toàn Nga, 1961). *Hai điểm $A$ và $B$ chuyển động đều với vận tốc góc bằng nhau theo đường tròn tâm $O_1$ và $O_2$ tương ứng (theo chiều kim đồng hồ). Chứng minh rằng đỉnh $C$ của tam giác đều $ABC$ cũng chuyển động đều trên đường tròn nào đó.*




Hình 18

Lời giải. Giả sử vectơ $O_1O_3$ là ảnh của vectơ $O_1O_2$ một góc $60^\circ$ theo hướng cùng hướng với hướng của $AB$ thành $AC$. Các điểm $A'$ và $B'$ là ảnh của $A$ và $B$ qua phép quay quanh điểm $O_1$. Khi quay đều của các vectơ $O_1A$ và $O_2B$ với cùng vận tốc góc thì tam giác $O_1A'A$ quanh điểm $O_1$, các vectơ $O_3B'$ và $B'C = A'A$, nghĩa là tổng của chúng $O_3C$ quay quanh $O_3$. □

## 7. Bài tập rèn luyện

Bài tập 3. Cho tam giác đều $ABC$ nội tiếp trong đường tròn. $M$ là một điểm tùy ý trên cung $BC$ đối diện đỉnh $A$. Chứng minh rằng $BM + MC = MA$.

Bài tập 4. Dựng về phía ngoài của $\triangle ABC$ các tam giác đều $A'BC$, $AB'C$, $ABC'$. Chứng minh rằng $AA' = BB' = CC'$ và các đường thẳng $AA'$, $BB'$, $CC'$ cắt nhau tại một điểm.

Bài tập 5. Cho ba điểm $A, B, C$ thẳng hàng ($B$ nằm giữa $A$ và $C$). Dựng các tam giác đều $ABE$, $BCF$ nằm trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là $AC$. $M, N$ tương ứng là trung điểm của $AF$ và $CE$. Chứng minh rằng $BMN$ là tam giác đều.

Bài tập 6 (Thi vào 10 PTTH chuyên Đại học Quốc gia Hà Nội, 1993). Cho tam giác đều $ABC$ nội tiếp đường tròn tâm $O$ bán kinh $R$. Quay tam giác $ABC$ góc $90°$ quanh tâm $O$ được tam giác $A_1B_1C_1$. Tính diện tích phần chung của hai tam giác $ABC$ và $A_1B_1C_1$ theo $R$.

Bài tập 7 (Tạp chí Komal, B. 3387, 2000). Hãy xác định góc $\alpha$, lbiết rằng với một vectơ $\vec{p}$ khác vectơ 0, tổng của $\vec{p}$ và vectơ thu được từ $\vec{p}$ nhờ phép quay góc $2\alpha$ bằng vectơ nhận được từ $\vec{p}$ nhờ phép quay góc $\alpha$.

Bài tập 8 (Olympic Toán lần thứ 12 Liên bang Nga). Hai tam giác vuông $ABC$ và $A'B'C'$ bằng nhau ($\angle C = \angle C' = 90°$) được đặt trong mặt phẳng sao cho trung điểm $M$ của các cạnh $AB$ và $A'B'$ trùng nhau và các đỉnh của hai tam giác được đánh số theo cùng chiều dương. Gọi $D$ là giao điểm của các đường thẳng $BC$ và $B'C,'$ $E$ là giao điểm của các đường thẳng $AC$ và $A'C'$. Chứng minh rằng bốn điểm $C$, $D$, $M$, $E$ cùng nằm trên một đường tròn.

Bài tập 9 (IMO shortlist 1992). CHo tứ giác $ABCD$ thỏa mãn điều kiện $AC \perp BD$. Vẽ ra ngoài tứ giác $ABCD$ bốn hình vuông $ABEF, BCGH, CDIJ, DAKL$. Giao điểm của bốn đường thẳng $CL$, $DF$, $AH$, $BJ$ được kí hiệu lần lượt là $P_1$, $Q_1$, $R_1$, $S_1$, còn giao điểm của bốn đường thẳng $AI$, $BK$, $CE$, $DG$ được kí hiệu lần lượt là $P_2$, $Q_2$, $R_2$, $S_2$. Chứng minh rằng hai tứ giác $P_1Q_1R_1S_1$ và $P_2Q_2R_2S_2$ bằng nhau.

Bài tập 10 (Vô địch Bungari 1979). Các đỉnh của ngũ giác lồi được sắp xếp sao cho các tam giác $ABC$ và $CDE$ là những tam giác đều. Chứng minh rằng nếu $O$ là tâm của tam giác $ABC$, còn $M$ và $N$ lần lượt là trung điểm của $BD$ và $AE$ thì các tam giác $OME$ và $OND$ đồng dạng.

Bài tập 11 (Đề thi HSG Quốc gia năm học 2012). Cho tam giác $ABC$ cố định trên đường tròn $O$ ($BC$ không đi qua tâm $O$ ) và điểm $A$ thay đổi trên cung lớn $BC$ sao cho $AB \neq AC$. Đường tròn nội tiếp $(I)$ của tam giác $ABC$ tiếp xúc với $BC$ tại $D$. Gọi $I_a$ là tâm đường tròn bàng tiếp góc $BAC$. $L$ là giao điểm của $I_aD$ với $OI$ và $E$ là điểm trên $(I)$ sao cho $DE$ song song với $AI$.

(a) Đường thẳng $LE$ cắt đường thẳng $AI$ tại $F$. Chứng minh rằng $AF = AI$.

(b) Trên đường tròn $(J)$ ngoại tiếp tam giác $I_aBC$ lấy điểm $M$ sao cho $I_aM$ song song với $AD$, $MD$ cắt lại $(J)$ tại $N$. Chứng minh rằng trung điểm $T$ của $MN$ luôn thuộc một đường tròn cố định.

## 8. Lời kết

Trên đây chỉ là số rất ít các bài tập sử dụng phép quay và GeoGebra trong giải toán hình học. Hy vọng bài viết gây sự chú ý và hứng thú của bạn đọc sử dụng GeoGebra trong dạy và học toán.

Các bạn có thể sử dụng các tài liệu [1], [2], [9] - [13] để luyện tập sử dụng GeoGebra trong giải các bài tập về phép quay nói riêng, phép biến hình nói chung. GeoGebra còn có thể trợ giúp dạy và học trong khá nhiều lĩnh vực khác (Phân tích một số ra thừa số nguyên tố [3], Hình thành khái niệm tích phân [7], Kiểm tra các giả thuyết hình học [5], Quĩ tích [8], Phân tích đa thức thành nhân tử [4], Dựng thiết diện [6],...).

## Tài liệu tham khảo


[1] Nguyễn Văn Ân, Trương Đức Hinh, Đào Tam, Phan Đức Thành, Trần Đình Viện, *Toán chọn lọc từ lớp 8 đến lớp 12*, Hội toán học và Công ty sách - thiết bị trường học Nghệ Tĩnh, 1988.

[2] Nguyễn Việt Hải, Vũ Hoàng Lâm, Phan Quân, 150 *bài tập sử dụng phép biến hình*, Nhà xuất bản Hải Phòng, 1995.

[3] Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Đỗ An Khánh, Bùi Thị Hằng Mơ, Tạ Duy Phượng, *Sử dụng GeoGebra để phân tích số dạng* $100\cdots001$ *ra thừa số nguyên tố*, Tạp chi Toán học và Tuổi trẻ, Số 517.

[4] Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Đỗ An Khánh, Bùi Thị Hằng Mơ, Tạ Duy Phượng, *GeoGebra - Một công cụ thí nghiệm trong phân tích đa thức thành nhân tử*, Kỷ yếu Seminar Toán Olympic, Nguyễn Văn Mậu chủ biên, Trung học Cơ sở Cầu Giấy.

[5] Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Tạ Duy Phượng, Phạm Thanh Tâm, Nguyễn Thị Bích Thủy, Trần Lê Thủy, Nguyễn Hoàng Vũ, *Sử dụng phần mềm GeoGebra để kiểm tra giả thuyết Hình học*, Tạp chi Toán học và Tuổi trẻ, Số 52.9

[6] Nguyen Thi Hong Hanh, Ta Duy Phuong, Nguyen Thi Bich Thuy, Tran Le Thuy, *Using GeoGebra software in teaching and learning the space Geometry*, *Education of Things: Digital Pedagogy*, 2021.

[7] Nguyen Thi Hong Hanh, Ta Duy Phuong, Nguyen Thi Bich Thuy, Tran Le Thuy, Nguyen Hoang Vu, *Use GeoGebra in teaching definite integral*, Proceedings of 2nd International Conference on Innovative Computing and Cutting-edge Technologies (ICCT), 11 and 12 September, 2020, in the Springer Series "Learning and Analytics in Intelligent Systems", 2021.

[8] Pham Van Hoang, Ta Duy Phuong, Nguyen Thi Bich Thuy,Tran Le Thuy, Nguyen Thi Trang, Nguyen Hoang Vu, *Modeling of Teaching-Learning Process of Geometrical LOCI in*

*the Plane with GeoGebra*, in *Proceedings of 2nd International Conference on Mathematical Modeling and Computational Science,* ICMMCS 2021.

[9] Nguyễn Đăng Phất, *Các phép biến hình trong mặt phẳng và ứng dụng giải toán hình học*, Nhà xuất bản Giáo dục.

[10] Waldemar Pompe, *Xung quanh phép quay: Hướng dẫn môn Hình học sơ cấp* (người dịch Nguyễn Hùng Sơn, Nguyễn Sinh Hoa), Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội (Tủ sách Sputnik, Số 033), 2016.

[11] V. V. Praxolov (Hoàng Đức Chính, Nguyễn Dễ dịch), *Các bài toán về hình học phẳng*, Tập 1, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, 2001.

[12] Đỗ Thanh Sơn, *Phép biến hình trong mặt phẳng*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2006.

[13] I. M. Yaglom, *Geometric Transformations*, translated from the Russian by Allen Shield, The Mathematical Association of America (MAA), 1975.