TOÁN GÒ ĐỐNG DẪN TỚI BÀI TOÁN TÍNH TỔNG HỮU HẠN TRONG CÁC SÁCH TOÁN HÁN NÔM

Phạm Văn Hoằng
Trường Đại học Giáo dục, Đại học Quốc gia Hà Nội
Phạm Vũ Lộc
Trung tâm Vũ trụ Việt Nam, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam
Trần Đại An
Nghiên cứu sinh, Đại học Sư phạm Hà Nội
Đoàn Thị Lệ
Nghiên cứu sinh, National Tsing-Hua University, Taiwan
Tạ Duy Phượng
Cộng tác viên Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam
Cung Thị Kim Thành, Phan Thị Ánh Tuyết
Thạc sĩ Hán Nôm

Toán gò đống: Dạng toán tính tổng hữu hạn đã có trong các sách toán Trung Quốc từ thế kỉ XI-XVII (xem thí dụ trong [4], [6]). Vì dạng toán này chủ yếu xuất phát từ các bài toán xếp hộp hoặc xếp quả thành đống cao nên các sách toán Trung Quốc và sách toán Hán Nôm (sách toán Việt Nam viết bằng chữ Hán và chữ Nôm) thường gọi là *toán gò đống*.

Một số vật [hộp, quả,...] được xếp trên mặt phẳng thành hình vuông, hình tam giác đều hoặc hình chữ nhật. Lớp tiếp theo được xếp chồng lên lớp thứ nhất với mỗi cạnh giảm đi một vật. Cứ như vậy được k lớp. Ta gọi hình nhận được là *gò*. Như vậy, mỗi mặt bên của gò nhìn từ ngoài vào có dạng một hình thang cân.

Đống được hiểu như các vật [viên gạch, quả, hộp,...] được xếp từ dưới lên trên, mỗi hàng của lớp trên giảm một vật so với hàng ở lớp dưới, giảm dần đến đỉnh chỉ còn 1 viên hoặc một hàng. Đống có thể có đáy là một hàng (đống dựa tường), có thể đáy là một lớp vật xếp thành hình vuông, tam giác đều hoặc chữ nhật. Nếu đáy là hình vuông hoặc tam giác đều thì mỗi mặt bên của đống nhìn từ ngoài vào là tam giác đều. Nếu đáy là hình chữ nhật thì mặt bên là tam giác đều hoặc hình thang cân.

Bài viết này trình bày dạng toán gò đống trong 3 cuốn sách toán Hán Nôm [1] - [3], dẫn tới các bài toán tính tổng hữu hạn.

Để dễ dàng cho bạn đọc và tiện sử dụng trong các lớp khác nhau, chúng tôi kết hợp trình bày cách giải trong sách toán Trung Quốc và sách toán Hán Nôm với những giải thích và chứng minh tỉ mỉ theo ngôn ngữ hiện đại.

1. Dạng toán 1: Xếp vật thành đống dựa tường

1.1. Dạng toán 1.1: Đống nhọn dựa tường

Trước khi phát biểu các bài toán cụ thể, Nguyễn Hữu Thận thường giải thích dạng toán và phương pháp giải. Ông gọi vật xếp thành đống là *vật xếp thành tầng*.

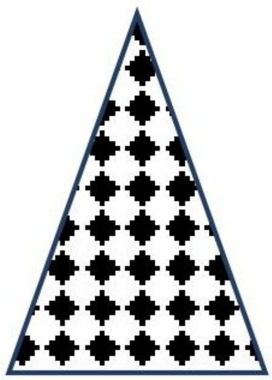
Vật xếp thành tầng nhọn dựa tường một mặt ([2], quyển 6, trang 49a): Vật chỉ xếp một chiều, từ dưới lên trên, mỗi tầng giảm một cái, đến chóp nhọn chỉ còn một cái. Từ tầng thấp nhất, được một số vật thì từ đáy đến tầng ngọn, số tầng cũng bằng số vật [ở tầng thấp nhất] vậy.

Nguyễn Hữu Thận cũng nêu *Phép tính* ([2], quyển 6, trang 49a - 49b): Lấy số cái [số vật] ở tầng thấp nhất cộng với ngọn 1 cái, chia nửa. Lấy số cái ở tầng dưới cùng, nhân với nó được kết quả.

Trình Đại Vị cũng nêu Qui tắc tính số vật trong đống nhọn một mặt như sau.

Qui tắc ([5], trang 13a): Mượn phép ruộng tam giác, đặt số vật ở đáy cộng vào 1 ở trên làm thực. Lấy số vật ở đáy làm pháp, nhân vào chia nửa được kết quả.

Số vật ở chân đáy của đống nhọn cũng chính là số tầng cao.



Hình 1: Mô hình *Đống nhọn dựa tường* ([5], trang 13a).

Giải thích 1: Nhiều công thức giải dạng toán gò đống (tính tổng số vật rời rạc) được mô phỏng từ các công thức tính diện tích, thể tích đã biết (diện tích hình thang, tam giác, thể tích khối đa diện,...).

Giải thích 2: Vì mỗi tầng bớt đi 1 nên số vật ở tầng dưới cùng cũng chính là số hàng. Dẫn tới bài toán tính tổng S_n của dãy số $n,\ n-1, \dots, 3, 2, 1$ nếu tính từ dưới lên trên, hoặc $1,\ 2,\ 3, \dots,$ $n-1,\ n$ nếu tính từ trên xuống dưới. Ta xét bài toán tổng quát hơn:

Bài toán: *Tính tổng* $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ *của n số hạng đầu tiên của dãy số* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *với* $a_{i+1} = a_i + 1, i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Ta có công thức

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}. \tag{1}$$

Công thức này dễ dàng chứng minh bằng nhiều cách, thí dụ:

Do $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ và $a_i + a_{n-i+1} = (a_1 + i - 1) + (a_n - i + 1) = a_1 + a_n$, nên

$$2S_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1)$$

$$= (a_1 + a_n) + ((a_1 + 1) + (a_n - 1)) + \cdots + (a_n + a_1) = n(a_1 + a_n).$$

Vậy (1) được chứng minh.

Trường hợp đặc biệt: *Tổng n số tự nhiên đầu tiên được tính theo công thức*

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \times (n+1)}{2}. \tag{2}$$

Bài toán 1 ([5], tờ 13b). *Nay có đống nhọn một mặt dựa tường, chân đáy rộng 18 cái, hỏi tổng số cái?*

Lời giải. Đặt chiều rộng 18 cái làm thực. Đặt riêng 18 cái thêm đỉnh 1 cái, được 19 cái làm pháp. Nhân với nhau được 342 cái. Chia đôi thì được 171 cái. □

Giải thích 1: Đống nhọn dựa tường có chân đáy gồm 18 cái, mỗi hàng bớt đi một cái, tạo thành dãy số $18, 17, \ldots, 2, 1$, có tổng

$$S_{18} = 1 + 2 + 3 + \cdots + 17 + 18 = \frac{18 \times 19}{2} = 171.$$

Thực và pháp ở đây là hai thừa số trong phép nhân.

Giải thích 2: Sách toán Trung Hoa và sách toán Hán Nôm thường được trình bày theo cấu trúc: Phát biểu bài toán, Đáp số (Đáp rằng), Lời giải hay Qui tắc giải (Pháp viết, Phép tính) được viết bằng lời (chưa dùng công thức và kí hiệu toán học). Và gần như không có giải thích hay chứng minh công thức được sử dụng.

Bài toán 2 ([1], tờ 17a). *Nay có các bao gạo dựa tường một mặt, chân đáy 25 bao, hỏi có tất cả bao nhiêu bao gạo?*

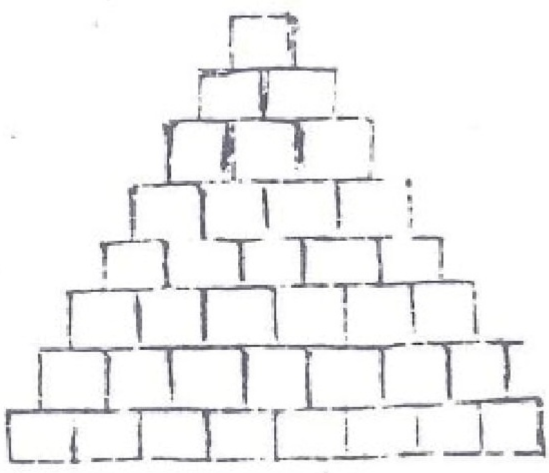
Lời giải. Lấy số chân đáy làm thực, lại lấy số đáy cộng 1 làm pháp nhân với nó, được 650. Chia đôi được 325 bao gạo. □

Giải thích: Dãy số $25, 24, \ldots, 1$ có tổng

$$S_{25} = 1 + 2 + \cdots + 25 = \frac{25 \times 26}{2} = 325.$$

Bài toán 3 ([1], tờ 17a, [3], tờ 95b). *Nay có một đống gạch, dưới chân 38 viên, hỏi chứa bao nhiêu gạch?*

Lời giải. Lấy chân 38 viên làm thực, lại lấy số chân thêm đỉnh là 1, được tổng 39 viên, nhân với nó, được 1482 viên. Chia đôi lấy nửa được 741 viên, hợp với câu hỏi. □



Hình 2: Xếp gạch thành bức tường ([1], tờ 17a)

Giải thích: Đống gạch có chân 38 viên, mỗi hàng trên bớt đi 1 viên, tạo thành dãy số $38, 37, 36, 35, \dots, 1$ (hình 2, minh họa với $n = 8$) có tổng

$$S_{38} = 1 + 2 + 3 + \cdots + 37 + 38 = \frac{38 \times 39}{2} = 741.$$

Bài toán 4 ([3], tờ 96a-96b, [2], quyển 6, tờ 57). *Nay có một đống quả một mặt, chân đáy rộng* 12. *Hỏi có bao nhiêu quả?*

Lời giải. Đặt chân dưới 12 làm thực, ngoài ra lấy 12 cộng với đỉnh là 1 cái được tổng là 13, làm phép nhân với nó được 156 cái, chia đôi lấy nửa, hợp với câu hỏi. □

Giải thích: Đống quả có chân 12 quả, mỗi hàng trên bớt đi 1 quả, tạo thành dãy số $12, 11, 10, \dots, 2, 1$ có tổng

$$S_{12} = 1 + 2 + \cdots + 12 = \frac{12 \times 13}{2} = 78.$$

1.2. Dạng toán 1.2: Đống cụt dựa tường

Nguyễn Hữu Thận gọi dạng toán này là *vật xếp nửa tầng* hay *đống cụt* ([2], quyển 6, trang 49a): Vật xếp nửa tầng tức là vật xếp không đến ngọn. Dạng toán *Đống nửa một mặt dựa tường* giống dạng toán trước, nhưng đống xếp không đến ngọn, nên gọi là đống nửa (đống cụt).

Phép tính ([2], quyển 6, trang 49a): Lấy số cái (số vật) ở tầng trên cùng cộng với số cái ở tầng dưới cùng, chia nửa. Lấy số cái ở tầng dưới cùng trừ đi số cái ở tầng trên cùng, kết quả lại cộng với 1 cái rồi nhân với nó, được số cái.

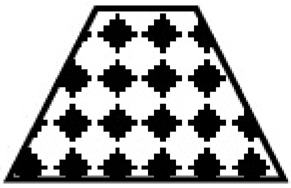
Giải thích: Gọi số vật tầng trên cùng là a_1, số vật tầng cuối cùng là a_n (cái). Số tầng bằng $n = a_n - a_1 + 1$. Theo công thức (1), tổng số vật bằng

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \times (a_n - a_1 + 1). \tag{3}$$

Bài toán 5 ([5], tờ 13b). *Nay có đống bằng một mặt, chân đáy gồm 7 cái, trên gồm 3 cái, hỏi có bao nhiêu cái?*

Lời giải. Đặt chân đế 7 cái trừ đi chiều rộng trên 3 cái, còn 4 cái, thêm 1 được 5 cái làm pháp, cũng là 5 tầng vậy. Cộng riêng chiều rộng trên dưới được 10 cái làm thực, nhân với pháp, được 50 cái. Chia đôi được 25 cái, hợp với câu hỏi. □

Trình Đại Vị đã xét bài toán với đống xếp thiếu hai tầng trên (Hình 3).



Hình 3: Xếp vật thành đống cụt ([5], tờ 14a)

Giải thích: Tổng số vật là $S = 7 + 6 + 5 + 4 + 3 = \frac{(7+3)\times(7-3+1)}{2} = 25$.

Trình Đại Vị cũng viết ([5], tờ 14a): Đây là đống nhọn một mặt không có 2 tầng trên vậy (xem hình 3).

Dùng phép hình thang, cộng số trên dưới lại làm thực. Lấy số cao làm pháp, nhân vào chia nửa được tích. Số đáy của đống bằng liên quan đến số cao của đống nhọn mà trừ đi 2 tầng trên, tức đống bằng cao 5 tầng vậy.

Nhận xét: ([1], tờ 17b) Nếu chiều rộng trên dưới đều lẻ hoặc đều chẵn thì có thể cộng lại. Chia đôi, nhân với chiều cao, nhanh hơn. Hoặc lấy chiều rộng trên dưới nhân với chiều cao, rồi sau chia đôi cũng vậy.

Bài toán 6 ([1], tờ 17b). *Nay có một đống đấu đất đầu bằng, dưới chân rộng 9 đấu, đỉnh rộng 4 đấu, chứa bao nhiêu đấu?*

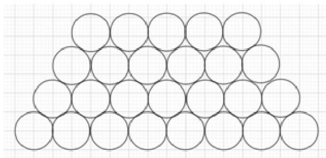
Lời giải. Lấy chân 9 đấu giảm đi trên 4 đấu còn 5. Thêm 1 được 6, làm thực (là 6 tầng vậy). Lại cộng chiều rộng trên dưới được 13 làm pháp, nhân với nhau, được 78. Chia đôi được số đấu. □

Giải thích: Dãy số 9, 8, 7, 6, 5, 4 (viên gạch tính từ dưới lên) hay 4, 5, 6, 7, 8, 9 (viên gạch tính từ trên xuống) có $a_1 = 4, a_n = 9$. Vì $n = a_n - a_1 + 1 = 9 - 4 + 1 = 6$ nên $n = 6$ và tổng số đấu đất bằng $S = 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 = \frac{(9+4)\times(9-4+1)}{2} = 39$.

Lưu ý: Dạng toán 1 với các ví dụ trong các sách toán Hán Nôm đã được trình bày chi tiết trong [10]. Để có cái nhìn toàn cảnh, chúng tôi trình bày lại ở đây. Lưu ý rằng, dạng toán này vẫn còn ý nghĩa thời sự.

Xét bài toán sau đây

Bài toán 7 ([9], Ví dụ 14, trang 20). *Các ống sắt ở một nhà máy được xếp như trong Hình 4, trong đó hàng trên cùng có 5 ống, hàng dưới có nhiều hơn hàng liền trên một ống, hàng dưới cùng có 20 ống. Hỏi tất cả có bao nhiêu ống.*



Hình 4: Minh họa 4 hàng trên cùng

Lời giải. Tổng số ống là $S = 5 + 6 + \cdots + 19 + 20 = (5 + 20) + (6 + 19) + (7 + 18) + (8 + 17) + (9 + 16) + (10 + 15) + (11 + 14) + (12 + 13) = 25 \times 8 = 200$. Tất nhiên, ta có thể tình theo công thức (3):

$$S = \frac{(5 + 20) \times (20 - 5 + 1)}{2} = \frac{25 \times 16}{2} = 200.$$

Kết quả 200 ống. □

2. Dạng toán 2 Gò đống có đáy là hình vuông

2.1. Dạng toán 2.1 Đống có đáy là hình vuông

Nguyễn Hữu Thận viết ([2], Quyển 6, tờ 49b): Tầng này gồm các vật tròn như hình viên đạn [hình cầu], xếp trên đất bằng, đáy là hình vuông. Từ tầng dưới lên trên, lần lượt mỗi hàng giảm 1 vật, đến ngọn còn đúng 1 viên. Theo bốn mặt quan sát, mỗi mặt là hình tam giác.

Bài toán 8 ([5], tờ 14b; [2], Quyển 6, tờ 49b). *Giả sử có hình vuông xếp tầng nhọn, bốn mặt đáy đều là 12 viên (đạn), hỏi tổng cộng có bao nhiêu viên?*

Lời giải. Lấy chiều rộng đáy là 12, cộng thêm 1, tổng được 13, nhân với chiều rộng đáy là 12, được 156. Lại lấy chiều rộng đáy là 12 cộng thêm nửa viên, tổng là 12 viên rưỡi, nhân với số đã tính được là 156, được 1950 làm thực. Dùng phép chia 3, được 650 viên, tức là số tích tứ giác 4 mặt nhọn xếp tầng. □

Giải thích: Xếp vật thành n lớp, lớp thứ k là một hình vuông có số vật là k^2. Vậy tổng số vật được tính theo công thức

$$S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+\frac{1}{2})}{3}. \tag{4}$$

Áp dụng với $n = 12$, ta được $S = \frac{12\times 13\times(12+\frac{1}{2})}{3} = 650$.

Ghi chú: Công thức (4) trong các sách toán hiện đại thường được viết dưới dạng

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \tag{5}$$

và được chứng minh bằng qui nạp.

Chỉ dẫn lịch sử: Dương Huy năm 1274 ([6], trang 303) đã tính số hộp lập phương chứa trong một đống có đáy vuông theo công thức (4):

$$S_n = \frac{n\times(n+1)\times(n+\frac{1}{2})}{3}.$$

Đống có đáy vuông, mỗi tầng gồm $n^2, (n-1)^2, \ldots, 2^2, 1^2$ các lập phương nhỏ. Do đó

$$S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2.$$

Dương Huy đã không chứng minh hoặc giải thích công thức (4). Bốn trăm năm sau, Du Zhigeng (cuối thế kỉ XVII), đã nhận xét rằng ba cột với bốn góc có thể được chắp lại với nhau để nhận được hình hộp chữ nhật tương đương với nửa chiều cao phù hợp chính xác với mặt trên của hình hộp (Hình 5). Như vậy ta có hộp chữ nhật với số chiều là $n, n+1, n+\frac{1}{2}$ với thể tích bằng ba lần tổng đã cho (Hình 4, [6], trang 303). Đây cũng là cách chứng minh hình học các công thức tính tổng của người xưa (khác với cách chứng minh công thức tính tổng thường bằng qui nạp toán học hoặc giải tích như ngày nay).

Bài toán 9 ([1], tờ 18a). *Nay có đống đá nhọn bốn mặt, đáy (một mặt) rộng 13 cái, hỏi đống chứa bao nhiêu viên đá?*

Lời giải. Đặt số rộng đáy là 13, lại lấy số ấy thêm nửa cái, được 13 cái rưỡi, nhân với nhau, được 175 rưỡi. Lại lấy 13 thêm 1 cái, được 14, nhân với nó, được 2457 làm thực. Chia cho 3, được 819 viên. □

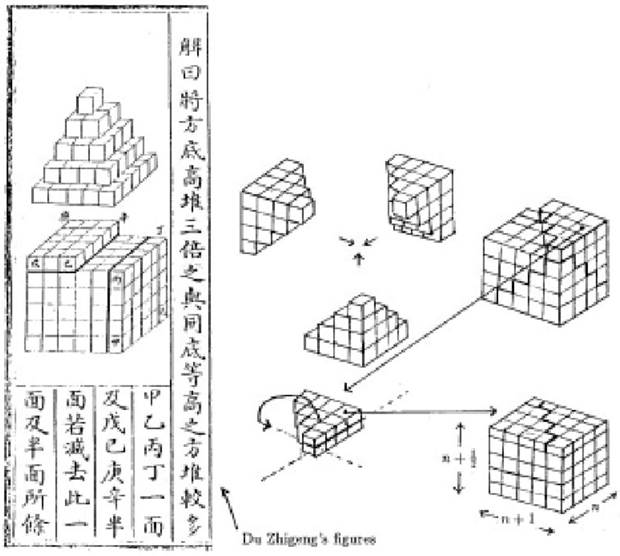
Nhận xét: ([1], tờ 18a) Bài này nếu lần đầu thêm 1, lần sau thêm nửa, cũng vậy.

Giải thích: Sử dụng công thức (4), ta được

$$S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + 13^2 = \frac{13\times(13+\frac{1}{2})\times(13+1)}{3},$$

hoặc

$$S_n = \frac{13\times(13+1)\times(13+\frac{1}{2})}{3} = 819.$$



Hình 5: Chứng minh công thức (4)

2.2. Dạng toán 2.2: Gò có đáy là hình vuông

Bài toán 10 ([2], Quyển 6, tờ 49b). *Giả sử có gò đáy là hình vuông xếp nửa tầng, bốn mặt đều, có chiều rộng trên là 7 viên gạch, chiều rộng dưới là 12 viên, hỏi tổng số viên gạch?*

Lời giải. Lấy chiều rộng trên là 7 viên tự nhân với nó, được 49, ghi lại. Chiều rộng dưới là 12 viên tự nhân với nó, được 144, ghi lại. Lại lấy chiều rộng trên là 7 nhân với chiều rộng dưới là 12, được 84, lại ghi nữa. Lấy chiều rộng trên là 7 trừ với chiều rộng dưới là 12, thừa 5. Chia nửa được 2 viên rưỡi, lại ghi nữa. Rồi cộng 4 số đã ghi, được 297 viên rưỡi. Ngoài ra, lấy chiều rộng trên là 7 trừ với chiều rộng dưới là 12, thêm 1 vào 5 được 6, tức là số tầng, nhân với nó, được 1677 làm thực. Dùng phép chia 3, được 559 viên, tức là tổng số gạch của gò hình vuông xếp nửa tầng. □

Giải thích: Hình chóp cụt có đáy dưới là hình vuông cạnh 12, đáy trên là hình vuông cạnh 7, vậy tổng số viên gạch là $7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2 = 559$.

Tuy nhiên, Nguyễn Hữu Thận đã sử dụng công thức tổng quát (6) dưới đây để tính.

Công thức tổng quát tính tổng $S = m^2 + (m+1)^2 + \cdots + n^2$.

Gọi cạnh đáy dưới của gò hình chóp cụt đáy vuông là n, cạnh đáy trên là m. Khi ấy tổng các viên đá xếp trong đống là

$$S = m^2 + (m+1)^2 + \cdots + n^2 = \frac{(m^2 + n^2 + mn + \frac{n-m}{2})(n-m+1)}{3}. \tag{6}$$

Thật vậy

$$S = \sum_{i=0}^{n-m} (m+i)^2 = \sum_{i=0}^{n-m} m^2 + \sum_{i=0}^{n-m} 2mi + \sum_{i=0}^{n-m} i^2$$

$$\begin{aligned}
&= m^2(n-m+1) + 2m\frac{(n-m)\times(n-m+1)}{2} + \frac{(n-m)(n-m+1)(n-m+\frac{1}{2})}{3} \\
&= (3m^2 + 3m(n-m) + (n-m)(n-m+\frac{1}{2})) \times \frac{n-m+1}{3} \\
&= \frac{(m^2+n^2+mn+\frac{n-m}{2})(n-m+1)}{3}.
\end{aligned}$$

Áp dụng với $m = 7, n = 12$ ta được

$$S = \frac{(7^2 + 12^2 + 7\times 12 + \frac{12-7}{2}) \times (12-7+1)}{3} = 559.$$

Nhận xét 1: Gò hình chóp cụt đáy dưới n, đáy trên m chính là đống hình chóp có đáy là hình vuông cạnh n cắt đi ngọn là đống hình chóp đáy là hình vuông cạnh $m-1$. Ta có

$$S = S_n - S_{m-1} = (n^2 + \cdots + 2^2 + 1) - ((m-1)^2 + \cdots + 1) = m^2 + (m+1)^2 + \cdots + n^2 = (6).$$

Nhận xét 2: Khi $m = 1$ thì công thức (6) trở về công thức (4).

3. Dạng toán 3 Gò đống có đáy tam giác

3.1. Dạng toán 3.1 Đống có đáy tam giác

Nguyễn Hữu Thận viết ([2], Quyển 6, tờ 49b): Tầng này hình chóp tam giác như vật hình viên đạn [hình cầu], xếp bằng trên mặt đất thành hình tam giác. Từ dưới lên trên, mỗi hàng tại mỗi tầng trên lần lượt giảm 1 viên, đến ngọn chỉ còn 1 viên. Từ ba mặt nhìn nó, mỗi mặt cũng là hình tam giác, nên gọi là tam giác xếp tầng nhọn.

Lấy tầng thấp nhất mỗi cạnh một số viên bày lên trên. Lại lấy tầng thấp nhất mỗi cạnh một số viên. Phép tính cộng thêm 2 viên của hàng, nhân với nó, được số làm thực. Dùng phép chia 6, được tích.

Bài toán 11. *([5], trang 14a) Nay có một đống quả đáy tam giác, đáy rộng một mặt 7 quả, hỏi có tất cả bao nhiêu quả?*

Lời giải. Đặt chiều rộng đáy 7 quả. Lấy riêng 7 quả thêm 1 được 8 cái nhân vào, được 56 quả. Lại lấy 7 quả thêm 2 được 9 quả nhân với 56 quả được 504 quả làm thực. Chia 6 hợp với câu hỏi. □

Giải thích: Vì đáy là tam giác, các lớp (tính từ dưới lên) có số quả là $S_7 = 1+2+\cdots+7 = 28$, $S_6 = 1+2+\cdots+6 = 21$, $S_5 = 1+2+3+4+5 = 15$, $S_4 = 10$, $S_3 = 6$, $S_2 = 3$, $S_1 = 1$.

Vậy tổng số quả ở đống tam giác 7 tầng là

$$S = 1+3+6+10+15+21+28 = 84.$$

Tuy nhiên, Trình Đại Vị đã áp dụng công thức (7) dưới đây cho $n = 7$ và được

$$S = \frac{7 \times (7+1) \times (7+2)}{6} = 84.$$

Công thức tổng quát tính đống quả có đáy tam giác: Vì đống quả gồm n tầng, tầng thứ k là tam giác đều mỗi cạnh gồm k quả nên số quả ở tầng thứ k là

$$S_k = 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

$$S_1 = 1,\ S_2 = 3,\ S_3 = 6,\ S_4 = 10,\ S_5 = 15, \ldots$$

Vậy tổng số quả ở đống n tầng đáy tam giác là:

$$S_{\sum n} = S_1 + S_2 + \cdots + S_n = \frac{1 \times 2}{2} + \frac{2 \times 3}{2} + \cdots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \quad (7)$$

Thật vậy, giả sử công thức (7) đúng với n. Khi ấy

$$S_{\sum n+1} = S_{\sum n} + S_{n+1} = \frac{n \times (n+1) \times (n+2)}{6} + \frac{(n+1) \times (n+2)}{2} = \frac{(n+1) \times (n+2) \times (n+3)}{6}.$$

Ngoài ra, ta còn một chứng minh khác nữa như sau. Vì

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

nên

$$S_{\sum n} = \frac{1 \times 2}{2} + \frac{2 \times 3}{2} + \cdots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} \times \sum_{i=1}^{n} i \times (i+1) = \frac{1}{2} \times \sum_{i=1}^{n} (i^2 + i)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i\right) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Vậy công thức (7) được chứng minh.

Bài toán 12 ([2], Quyển 6, trang 49b). *Giả sử tam giác xếp tầng nhọn, ba mặt của nó mỗi mặt 5 viên, hỏi tổng số.*

Lời giải. Bày xuống đáy 5 viên, cộng thêm 1 viên là 6, nhân với 5 viên, được 30. Lại lấy 5 viên dưới đáy, cộng thêm 2, tổng cộng là 7, nhân với 30, được 210. Dùng phép chia 6, được 35 viên, tức là tổng số viên trong tam giác xếp tầng nhọn. □

Giải thích: Áp dụng công thức (7) cho $n = 5$ ta được

$$S_{\sum 5} = \frac{5(5+1)(5+2)}{6} = 35.$$

Hoặc tính trực tiếp

$$S_{\sum 5} = S_5 + S_4 + S_3 + S_2 + S_1 = 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 35.$$

Bài toán 13 ([1], trang 18b). *Nay có một đống quả đáy tam giác, đáy rộng mỗi mặt 18 quả, chứa bao nhiêu quả?*

Lời giải. Đặt số chiều rộng, lại riêng lấy chiều rộng thêm 1 quả, được 19, nhân với nhau, được 342 quả. Lại lấy 18 thêm 2 được 20, nhân vào, được 6840 làm thực. Chia cho 6 được số chứa. □

Giải thích: Áp dụng công thức (7) cho $n = 18$ ta được

$$S_{\sum 18} = \frac{18(18+1)(18+2)}{6} = 1140.$$

3.2. Dạng toán 3.2: Gò có đáy tam giác

Nguyễn Hữu Thận viết ([2], Quyển 6, trang 49b): Gò là tam giác xếp tầng nhọn, nhưng tầng không đến ngọn mà đỉnh trên bằng.

Gò dạng này có đáy là tam giác, đỉnh của gò cũng là tam giác, các mặt bên nhìn vào là hình thang cân. Ta được gò hình chóp cụt.

Bài toán 14 ([2], Quyển 6, trang 49b). *Giả sử có tam giác xếp nửa tầng, ba mặt đều có chiều rộng trên là 4 viên, chiều rộng dưới là 9 viên, hỏi tổng số.*

Lời giải. Lấy chiều rộng trên là 4 viên tự nhân với nó, được 16, ghi lại. Chiều rộng dưới là 9 viên tự nhân với nó, được 81, ghi lại. Lại lấy chiều rộng trên nhân với chiều rộng dưới, được 36, ghi lại. Gấp đôi chiều rộng dưới tính nhập vào chiều rộng trên, được 22, ghi lại. Cộng 4 số đã ghi, được 155. Ngoài ra, lấy chiều rộng trên trừ chiều rộng dưới, còn 5.

Phép tính lại thêm 1 thành 6 là số tầng, nhân với nó, được 930 làm thực. Dùng phép chia 6, được 155 viên, tức tổng số viên trong tam giác xếp tầng cụt. □

Giải thích 1: Vì mỗi tầng là một tam giác có số viên là $S_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ nên tổng số viên từ tầng dưới cùng (cạnh 9 viên) lên tới tầng trên cùng (cạnh 4 viên) là

$$\frac{9 \times 10}{2} + \frac{8 \times 9}{2} + \cdots + \frac{4 \times 5}{2} = 155.$$

Giải thích 2: Vì đống là chóp cụt tam giác nên số quả có thể tính như "*toàn tích*" theo công thức (7) (tổng số quả trong chóp tam giác $S_9 = \frac{9 \times 10 \times 11}{6} = 165$), trừ số quả trong chóp tam giác trên đỉnh với cạnh đáy là 3 cũng theo công thức (7) ("*hư tích*" - không có thật, $S_3 = \frac{3 \times 4 \times 5}{6} = 10$). Suy ra

$$S = S_{\sum 9} - S_{\sum 3} = 165 - 10 = 155.$$

Giải thích 3: (Nguyễn Hữu Thận) Áp dụng công thức tổng quát (8) dưới đây với $n = 9, m = 4$ ta được

$$S = (4^2 + 9^2 + 4 \times 9 + 2 \times 9 + 4) \times \frac{9 - 4 + 1}{6} = 155.$$

Công thức tổng quát tính đống quả hình chóp cụt: *Giả sử có đống quả hình chóp cụt đáy tam giác. Cạnh đáy trên có m quả, cạnh đáy dưới có n quả. Khi ấy tổng số quả trong đống hình chóp cụt đáy tam giác được tính theo công thức*

$$(m^2 + n^2 + mn + 2n + m) \times \frac{n - m + 1}{6}. \tag{8}$$

Lời giải. Đáy là tam giác cạnh n có số quả bằng $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Đỉnh là tam giác cạnh m nên số quả bằng $\frac{m(m+1)}{2}$. Tổng số quả của chóp tam giác cụt bằng

$$S = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} + \cdots + \frac{m(m+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \sum_{i=0}^{n-m}(m+i)(m+i+1) = \frac{1}{2} \times \sum_{i=0}^{n-m}((m^2+m) + (2m+1)i + i^2)$$

$$= \frac{1}{2} \times ((m^2+m)(n-m+1) + (2m+1) \times \sum_{0}^{n-m} i + \sum_{0}^{n-m} i^2)$$

$$= \frac{1}{2} \times ((m^2+m)(n-m+1) + (2m+1) \times \frac{(n-m)(n-m+1)}{2} + \frac{(n-m)(n-m+1)(2(n-m)+1)}{6})$$

$$= \frac{n-m+1}{12} \times (6(m^2+m) + 3(2m+1)(n-m) + (n-m)(2(n-m)+1))$$

$$= (m^2 + n^2 + mn + 2n + m) \times \frac{n-m+1}{6}.$$

Vậy (8) đúng. □

Nhận xét 1: Khi $m = 1$ thì công thức (8) trở về công thức (7).

Nhận xét 2: Số quả có trong gò tam giác cụt chính là số quả trong chóp tam giác có cạnh đáy n ("*toàn tích*") trừ đi số quả có trong chóp tam giác ("*hư tích*") cạnh đáy $m - 1$. Ta có

$$S = S_{\sum n} - S_{\sum(m-1)} = (m^2 + n^2 + mn + 2n + m) \times \frac{n-m+1}{6}.$$

Bài toán 15 ([5], tờ 14b, [1], tờ 18b). *Nay có một gò quả tam giác cụt, mỗi mặt trên rộng 5 cái, đáy rộng 12 cái, hỏi tổng là bao nhiêu cái?*

[5], tờ 14b. Cũng dùng phép tam giác, trước tiên lấy chiều rộng dưới 12 cái, tính ra tích toàn bộ là 364 cái. Lấy riêng chiều rộng ảo của đống nhọn trên là 4 cái, tính ra tích ảo là 20, trừ khỏi tích toàn bộ còn tích đống nửa là 344 cái. □

Giải thích: Toàn tích là tổng số quả trong chóp nhọn đáy tam giác 12 tầng, theo công thức (7)

$$S_{\sum 12} = \frac{1 \times 2}{2} + \frac{2 \times 3}{2} + \cdots + \frac{12 \times 13}{2} = \frac{12 \times 13 \times 14}{6} = 364.$$

Hư tích là phần ngọn, tính theo công thức (7) với $n = 4$:

$$S_{\sum 4} = \frac{1 \times 2}{2} + \frac{2 \times 3}{2} + \cdots + \frac{4 \times 5}{2} = \frac{4 \times 5 \times 6}{6} = 20.$$

Thực tích là số quả trong chóp cụt bằng $364 - 20 = 344$ quả.

Một pháp khác ([5], tờ 14b): Lấy chiều rộng trên 5 tự nhân được 25, chiều rộng dưới 12 tự nhân được 144. Chiều rộng trên 5 nhân chiều rộng dưới 12, được 60. Lại gấp đôi chiều rộng dưới được 24, cộng thêm chiều rộng trên 5, được 29. Cộng cả bốn số được 258 làm thực. Lấy chiều rộng dưới 12 trừ đi chiều rộng trên 5 còn 7, cộng 1 được cao 8 làm pháp. Lấy pháp nhân thực được 2064. Chia 6 được đap số.

Giải thích: Tính theo công thức (8) với $k = 5, n = 12$, ta được

$$S = (5^2 + 12^2 + 5 \times 12 + 2 \times 12 + 5) \times \frac{12 - 5 + 1}{6} = 344.$$

Cũng có thể tính trực tiếp như sau: Vì đáy của đống quả là tam giác nên tổng số quả từ tầng 12 lên tới tầng 5 là

$$\frac{12 \times 13}{2} + \frac{11 \times 12}{2} + \frac{10 \times 11}{2} + \frac{9 \times 10}{2} + \frac{8 \times 9}{2} + \frac{7 \times 8}{2} + \frac{6 \times 7}{2} + \frac{5 \times 6}{2}$$
$$= 78 + 66 + 55 + 45 + 36 + 28 + 21 + 15 = 344.$$

4. Dạng toán 4: Gò đống có đáy là chữ nhật

4.1. Dạng toán 4.1: Đống có đáy là chữ nhật

Nguyễn Hữu Thận viết ([2], Quyển 6, tờ 49b): Tầng này cũng là vật hình viên đạn, xếp trên đất bằng, chiều dài và chiều rộng không bằng nhau. Ví dụ như tầng trên dài 13 viên, rộng 8 viên, giảm lần lượt lên trên, mỗi tầng giảm 1 viên, đến ngọn thì chiều dài là 6 viên, chiều rộng ngọn là 1 viên, vậy là chiều dài và chiều rộng không bằng nhau.

Bài toán 16 ([5], tờ 13a, [1], tờ 18a - 18b). *Nay có một đống bình rượu, chân đế rộng 8 cái, dài 13 cái. Hỏi tổng số là bao nhiêu?*

Lời giải. Đặt chiều dài trừ đi chiều rộng còn 5 cái, chia đôi được 2 cái rưỡi. Thêm nửa cái thành 3 cái, cộng gộp vào chiều dài, được 16 cái. Lấy 8 cái nhân với nó, được 128 cái. Lại lấy riêng 8 cái chiều rộng thêm 1 thành 9 cái, nhân với nó được 1152 cái. Chia 3 hợp với câu hỏi. □

Giải thích: Đây là dạng đống có đáy là chữ nhật với số chiều $m \times n$, xếp dần lên đến tầng trên cùng còn 1 hàng có $n - m + 1$ cái.

Vì mỗi tầng mỗi mặt giảm đi một cái nên tổng số bình rượu là

$$8 \times 13 + 7 \times 12 + 6 \times 11 + 5 \times 10 + 4 \times 9 + 3 \times 8 + 2 \times 7 + 1 \times 6 = 384.$$

Tuy nhiên, Trình Đại Vị và Phạm Gia Kỷ đã tính theo công thức (9) dưới đây Công thức 1 tính tổng số vật xếp thành đống có đáy là chữ nhật: Với đống quả xếp từ dưới lên trên, đáy là chữ nhật $m \times n, m \leqslant n$ ta có tổng số vật được tính theo công thức

$$S = \frac{1}{3}m(m+1)(\frac{n-m}{2} + \frac{1}{2} + n) = \frac{1}{6}m(m+1)(3n-m+1). \tag{9}$$

Lời giải. Đống quả có các lớp tính từ dưới lên là $m \times n, (m-1) \times (n-1), \ldots, 1 \times (n-m+1)$. Ta có

$$S = m \times n + (m-1) \times (n-1) + \cdots + 1 \times (n-m+1)$$
$$= \sum_{1}^{m} i(n-m+i) = \sum_{1}^{m}((n-m)i + i^2)$$
$$= (n-m)\sum_{1}^{m} i + \sum_{1}^{m} i^2 = (n-m) \times \frac{m(m+1)}{2} + \frac{m(m+1)(m+\frac{1}{2})}{3}$$
$$= \left(\frac{n-m}{2} + \frac{m+\frac{1}{2}}{3}\right) m(m+1) = \frac{(\frac{3(n-m)}{2} + m + \frac{1}{2})m(m+1)}{3} = \frac{1}{3}m(m+1)(\frac{n-m}{2} + \frac{1}{2} + n).$$

Vậy công thức (9) được chứng minh. □

Áp dụng với $m = 8, n = 13$, ta được

$$S = \frac{(\frac{13-8}{2} + \frac{1}{2} + 13)8(8+1)}{3} = \frac{16 \times 8 \times 9}{3} = 384.$$

Bài toán 17 ([2], Quyển 6, tờ 49a). *Giả sử có hình trụ vuông xếp tầng nhọn, tầng dưới cùng dài 12 viên, chiều rộng mặt là 8 viên, hỏi tổng số viên?*

Lời giải 1. ([2], Quyển 6, tờ 49a) Lấy chiều rộng dưới là 8 viên trừ với chiều dài dưới 12 viên, thừa 4, chia nửa được 2. Lại cộng thêm nửa viên, được 2 viên rưỡi. Tính nhập vào chiều dài dưới 12 viên, được 14 viên rưỡi. Lấy chiều rộng dưới là 8 viên nhân với nó, được 116. Lại lấy chiều rộng dưới là 8 viên, thêm 1 là 9 viên, nhân với nó, được 1044 viên làm thực. Dùng phép chia 3 chia cho nó, được 348 viên, tức là tổng số viên gạch trong hình trụ vuông xếp tầng nhọn. □

Nhận xét: ([2], Quyển 6, tờ 49b) Nhìn chung hình xếp tầng này ắt chiều rộng trên chỉ có 1 viên. Cho nên giả sử hỏi có chiều dài trên thì không nhất định dùng chiều rộng trên làm câu hỏi.

Giải thích: *Hình trụ vuông* (danh từ cổ) ở đây có nghĩa là một khối có đáy là chữ nhật được xếp thành tầng. Tầng trên so với tầng dưới thu lại mỗi cạnh một viên (gạch).

Tầng dưới cùng là chữ nhật cạnh 8×12. Vậy tổng số viên là

$$8 \times 12 + 7 \times 11 + 6 \times 10 + 5 \times 9 + 4 \times 8 + 3 \times 7 + 2 \times 6 + 1 \times 5 = 348.$$

Tuy nhiên, Nguyễn Hữu Thận đã áp dụng công thức (9) với $n = 12, m = 8$ là

$$\frac{(\frac{12-8}{2} + \frac{1}{2} + 12)8(8+1)}{3} = 348.$$

Lời giải. Lấy chiều dài dưới 12 viên nhân lên, được 24, tính nhập vào chiều dài trên 5 viên, tổng là 29. Lấy chiều rộng dưới 8 viên nhân với nó được 232, ghi lại. Ngoài ra lấy 232 nhân với chiều rộng dưới 8 viên, được 1856. Lại lấy số đã ghi là 232 cộng với 1856 được tổng cộng 2088 làm thực. Dùng phép chia 6, được 348 viên, giống như trên. □

Giải thích: Nguyễn Hữu Thận đã sử dụng công thức (10) dưới đây để tính.

Công thức 2 tính tổng số vật xếp thành đống có đáy là chữ nhật: *Đống quả có các tầng tính từ dưới lên (với $m \leqslant n$) là $m \times n, (m-1) \times (n-1), \ldots, 1 \times (n-m+1)$ với chiều dài trên $h = n - m + 1$. Tổng số vật là*

$$S = \frac{(2n+h)m \times m + (2n+h)m}{6}. \tag{10}$$

Thật vậy, ta có

$$S = (9) = \frac{m(m+1)(3n-m+1)}{6} = \frac{m(m+1)(2n+h)}{6}$$
$$= \frac{(2n+h)m \times m + (2n+h) \times m}{6} = (10).$$

Áp dụng với $n = 12, m = 8$ ta có chiều dài trên $h = n - m + 1 = 12 - 8 + 1 = 5$. Vậy

$$S = \frac{(2 \times 12 + 5) \times 8 \times 8 + (2 \times 12 + 5) \times 8}{6} = 348.$$

Bài toán 18 ([5], trang 15b). *Nay có một đống mặt ngang dưới rộng 10 cái, trên rộng 1 cái, mặt trước dưới rộng 12 cái, trên rộng 3 cái. Hỏi là bao nhiêu?*

Lời giải. Đặt chiều rộng dưới mặt trước 12 cái gấp đôi được 24 cái, thêm chiều rộng trên 3 được 27. Lấy chiều rộng dưới mặt ngang 10 nhân vào được 270. Đặt riêng 270 nhân với chiều rộng dưới (mặt) ngang được 2700, cộng vào 270 được 2970. Chia 6 thì được. □

Giải thích: Đây là đống có đáy là chữ nhật 10×12. Mỗi tầng tiếp theo mỗi chiều giảm đi 1, nên các tầng tiếp theo là $10 \times 12, 9 \times 11, 8 \times 10, 7 \times 9, 6 \times 8, 5 \times 7, 4 \times 6, 3 \times 5, 2 \times 4, 1 \times 3$. Tổng số vật bằng

$$10 \times 12 + 9 \times 11 + 8 \times 10 + 7 \times 9 + 6 \times 8 + 5 \times 7 + 4 \times 6 + 3 \times 5 + 2 \times 4 + 1 \times 3 = 495.$$

Tuy nhiên, Trình Đại Vị đã sử dụng công thức tổng quát (10) để tính

Áp dụng với $n = 12, m = 10$ thì $h = 12 - 10 + 1 = 3$. Theo công thức (9), ta có

$$\frac{(2 \times 12 + 3) \times 10 \times 10 + (2 \times 12 + 3) \times 10}{6} = 495.$$

Lời bình: Như Nguyễn Hữu Thận đã nhận xét, đầu bài cho trên rộng 1 cái là thừa.

4.2. Dạng toán 4.2: Gò có đáy là chữ nhật

Nguyễn Hữu Thận gọi dạng toán này là *Hình trụ vuông xếp nửa tầng* ([2], Quyển 6, tờ 50a): Tầng này bốn mặt dài rộng không bằng nhau, cũng là hình trụ vuông xếp tầng nhọn nhưng xếp tầng chưa đến ngọn đã dừng lại.

Công thức tổng quát cho hình trụ vuông xếp nửa tầng: *Cho đống vật có đáy là chữ nhật kích thước $m \times n$, mỗi tầng từ dưới lên trên mỗi cạnh rút đi 1, tầng trên cùng cũng là chữ nhật kích thước $k \times h$. Do mỗi tầng mỗi cạnh rút đi 1 nên $m - k = n - h$ và tổng số vật bằng*

$$S = ((2k + m)h + (2m + k)n + m - k) \times \frac{m - k + 1}{6}. \tag{11}$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} S &= k \times h + (k+1) \times (h+1) + \cdots + mn = \sum_{i=0}^{m-k} (k+i)(h+i) \\ &= \sum_{i=0}^{m-k} kh + (k+h) \sum_{i=0}^{m-k} i + \sum_{i=0}^{m-k} i^2 \end{aligned}$$

$$= kh(m - k + 1) + (k + h) \times \frac{(m-k)(m-k+1)}{2} + \frac{(m-k)(m-k+1)(2(m-k)+1)}{6}$$

$$\begin{aligned} &= ((6kh + 3(k+h)(m-k) + (m-k)(2m-2k+1))\frac{m-k+1}{6} \\ &= (6kh + 3km + 3hm - 3k^2 - 3kh + 2m^2 - 4km + 2k^2 + m - k)\frac{m-k+1}{6} \\ &= (3kh - km + 3hm + 2m^2 - k^2 + m - k)\frac{m-k+1}{6} \\ &= ((2k+m)h + (2m+k)(m-k+h) + m - k)\frac{m-k+1}{6} \\ &= ((2k+m)h + (2m+k)n + m - k)\frac{m-k+1}{6}. \end{aligned}$$

Vậy (11) được chứng minh.

Nhận xét 1: Khi $k = 1$ thì $h = n - m + 1$ và (11) trở về (9). Thật vậy, thay $k = 1$ và $h = n - m + 1$ vào (11) ta được

$$\begin{aligned} (11) &= ((2+m)(n-m+1) + (2m+1)n + m - 1) \times \frac{m-1+1}{6} \\ &= (2n - 2m + 2 + mn - m^2 + m + 2mn + n + m - 1)\frac{m}{6} \end{aligned}$$

$$= (3n + 3mn - m^2 + 1)\frac{m}{6} = (3n(m+1) - (m^2 - 1))\frac{m}{6} = \frac{m(m+1)(3n - m + 1)}{6} = (9).$$

Nhận xét 2: Công thức (11) cũng có thể viết dưới dạng

$$S = ((2h + n)k + (2n + h)m + n - h) \times \frac{n - h + 1}{6} \tag{12}$$

Vì $m-k=n-h$ nên $m-k+1=n-h+1$. Mặt khác ta có

$$(2k+m)h+(2m+k)n+m-k=2kh+mh+2mn+kn+n-h=(2h+n)k+(2n+h)m+n-h.$$

Vậy (11) = (12).

Bài toán 19 ([2], Quyển 6, tờ 49b). *Giả sử có hình trụ vuông xếp nửa tầng, chiều dài dưới 12 viên, chiều dài trên 7 viên, chiều rộng dưới 8 viên, chiều rộng trên 3 viên, hỏi tổng số viên?*

Lời giải. Lấy chiều dài trên 7 viên nhân đôi lên, được 14, cộng thêm chiều dài dưới 12 viên, tổng được 26. Lấy chiều rộng trên 3 viên nhân với nó, được 78. Lấy chiều dài dưới 12 viên nhân đôi lên, được 24, cộng thêm chiều dài trên 7 viên, tổng được 31. Lấy chiều rộng dưới 8 viên nhân với nó, được 248. Cộng 2 lần tích vừa nhân, được 326. Lại lấy chiều dài trên 7 viên trừ với chiều dài dưới 12 viên, thừa 5, cộng với tổng trên, được 331. Ngoài ra lấy chiều dài dưới 12 viên trừ đi chiều dài trên 7 viên, thừa 5. Lại thêm 1 vào phép tính, được số tầng lầu, nhân với nó được 1986 làm thực. Dùng phép chia 6, được 331, tức là số tích hình trụ vuông xếp nửa tầng. □

Giải thích: Vì đáy dưới là mặt chữ nhật cạnh $m\times n=8\times 12$, đáy trên là mặt chữ nhật $k\times h=3\times 7$ nên tổng là

$$8\times 12+7\times 11+6\times 10+5\times 9+4\times 8+3\times 7=331.$$

Nhưng Nguyễn Hữu Thận đã áp dụng công thức (12) với $m=8, k=3, n=12, h=7$

$$(2h+n)k+(2n+h)m+n-h)\frac{n-h+1}{6}$$

$$=(2\times 7+12)3+(2\times 12+7)\times 8+12-7)\frac{12-7+1}{6}=331.$$

Bài toán 20 ([5], tờ 15b - 16a, [1], tờ 19a, [3], tờ 97a - 97b). *Nay có một đống bình rượu, trên dài 25 cái, rộng 12 cái, dưới dài 30 cái, rộng 17 cái, cao 6 cái. Hỏi tích bao nhiêu?*

[3], tờ 97b. Nhân đôi *thượng trường* được 50 cái, cộng với *hạ trường* tổng cộng là 80 cái. Lấy chiều rộng 12 nhân với nó được 960 cái, lại nhân đôi*hạ trường* được 60 cái cộng với *thượng trường* được tổng 85 cái, lấy *hạ hoạt* 17 nhân với nó được 1445 cái tính nó được 2405 cái $(1445+960=2405)$, lại lấy *hạ trường* trừ đi *thượng trường* dư 5 tính vào được 2410 cái, lấy chiều cao 6 cái nhân với nó được 14460 làm thực, lấy 6 làm phép tính chia với nó là xong vậy. □

Giải thích: Đây là đống cụt có đáy là chữ nhật 17×30. Mỗi tầng tiếp theo mỗi chiều giảm đi 1, nên các tầng tiếp theo là $16\times 29, 15\times 28, 14\times 27, 13\times 26, 12\times 25$. Tổng số bình rượu bằng

$$17\times 30+16\times 29+15\times 28+14\times 27+13\times 26+12\times 25=2410.$$

Tuy nhiên, Trình Đại Vị, Nguyễn Hữu Thận và Tạ Hữu Thường đã tính theo công thức (12).

Áp dụng với $n=30, m=17, h=25, k=12$ ta được $m-k=17-12=5=30-25=n-h$. Khi đó

$$S=(2h+n)k+(2n+h)m+n-h)\frac{n-h+1}{6}$$

$$= ((25 \times 2 + 30) \times 12 + (30 \times 2 + 25) \times 17 + (30 - 25))\frac{30 - 25 + 1}{6} = 2410.$$

Nhận xét 1: ([3], tờ 97b) Nếu lấy bài toán đống dài để tính, lại tính ra hư tích ở trên, còn dưới là thực tích, cũng khớp với số này.

Giải thích Vì đáy dưới là chữ nhật 17×30 nên các lớp quả xếp đến tận đỉnh sẽ là 17×30, $16 \times 29, 15 \times 28, 14 \times 27, 13 \times 26, 12 \times 25, 11 \times 24, 10 \times 23, 9 \times 22, 8 \times 21, 7 \times 20, 6 \times 19, 5 \times 18$, $4 \times 17, 3 \times 16, 2 \times 15, 1 \times 4$. Tổng số quả là

$$17 \times 30 + 16 \times 29 + 15 \times 28 + 14 \times 27 + 13 \times 26 + 12 \times 25 + 11 \times 24 + 10 \times 23 + 9 \times 22$$
$$+ 8 \times 21 + 7 \times 20 + 6 \times 19 + 5 \times 18 + 4 \times 17 + 3 \times 16 + 2 \times 15 + 1 \times 4 = 3774.$$

Tính theo công thức (9)

$$S = \frac{1}{6}m(m+1)(3n - m + 1) = \frac{1}{6}(17(17+1)(3 \times 30 - 17 + 1)) = 3774.$$

Hư tích (đống chóp ở trên) có số quả là

$$11 \times 24 + 10 \times 23 + 9 \times 22 + 8 \times 21 + 7 \times 20 + 6 \times 19 + 5 \times 18 + 4 \times 17 + 3 \times 16 + 2 \times 15 + 1 \times 14 = 1364.$$

Tính hư tích theo công thưc (9) với $m = 11, n = 24$

$$S = \frac{m(m+1)(3n - m + 1)}{6} = \frac{(11(11+1)(3 \times 24 - 11 + 1)}{6} = 1364.$$

Vậy số quả thật có (trong hình chóp cụt là) $3774 - 1364 = 2410$ quả.

Nhận xét: ([1], tờ 19a) Bài này tương tự bài tính thể tích hình lăng trụ lệch. Nhưng bài này lại lấy hai chiều dài trừ đi nhau, lấy số dư cộng vào làm thực vậy.

Lăng trụ lệch: Kiểu này hai mặt dài không đối nhau, bốn mặt nghiêng đối nhau vậy. Cách tính là nhân đôi cạnh dài trên cộng với cạnh dài dưới, lấy cạnh rộng trên nhân với nó; nhân đôi cạnh dài dưới cộng với cạnh dài trên, lấy cạnh rộng dưới nhân với nó. Cộng hai cái làm một, lấy chiều cao nhân với nó. Lại chia cho 6.

Đây chính là công thức được chứng minh trong *Phụ lục*. Phạm Gia Kỷ cũng có chữ *nhưng*: *Nhưng bài này lại lấy hai chiều dài trừ đi nhau, lấy số dư cộng vào làm thực vậy*. Nhưng Ông cũng không giải thích rõ tại sao có chữ "*nhưng*" này.

Dưới đây chúng tôi trình bày chứng minh công thức lăng trụ lệch.

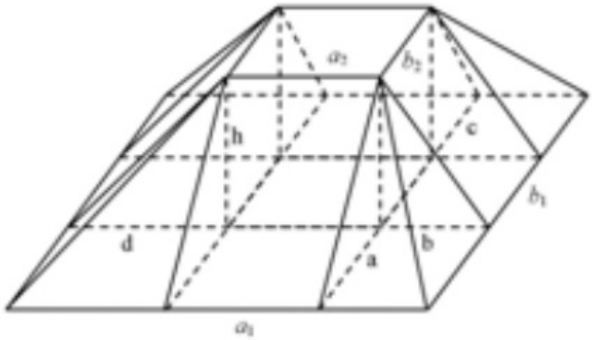
Phụ lục (công thức tính thể tích hình lăng trụ lệch): *Lăng trụ lệch* là lăng trụ có hai mặt là các hình chữ nhật song song, bốn mặt còn lại (các mặt bên) là những hình thang.

Nhận xét; Lăng trụ lệch khác với chóp cụt vì các cạnh bên kéo dài không nhất thiết cắt nhau tại một điểm.

Gọi a_1, b_1, a_2, b_2 tương ứng là chiều dài, chiều rộng của mặt dưới và mặt trên, h là chiều cao hình lăng trụ lệch (khoảng cách giữa hai mặt chữ nhật song song, Hình 6).

Ta có công thức tính thể tích hình lăng trụ lệch:

$$4V = ((2a_1 + a_2)b_1 + (2a_2 + a_1)b_2) \times \frac{h}{6}. \tag{13}$$



Hình 6: Chứng minh công thức tính thể tích lăng trụ lệch

Lời giải. (Xem [8] trang 551 và [7]) Chiếu đáy trên (đáy nhỏ) xuống đáy dưới. Ta có $a_2 = b + a_1 + d$ và $b_1 = a + b_2 + c$ (Hình 6). Lăng trụ cụt bị cắt thành 9 miếng: Một hộp chữ nhật có thể tích a_2b_2h, bốn lăng trụ đáy tam giác có tổng thể tích là $\frac{1}{2}aha_2 + \frac{1}{2}bhb_2 + \frac{1}{2}cha_2 + \frac{1}{2}dhb_2$ và bốn hình chóp đáy chữ nhật có tổng thể tích $\frac{1}{3}abh + \frac{1}{3}bch + \frac{1}{3}cdh + \frac{1}{3}adh$ (Hình 6).

Để ý rằng $a_2 = b + a_1 + d$ và $b_1 = a + b_2 + c$, ta tính được

$$V = a_2b_2h + \frac{1}{2}aha_2 + \frac{1}{2}bhb_2 + \frac{1}{2}cha_2 + \frac{1}{2}dhb_2 + \frac{1}{3}abh + \frac{1}{3}bch + \frac{1}{3}cdh + \frac{1}{3}adh.$$

Vậy công thức (13) được chứng minh. □

Kết luận: Bài báo trình bày các bài toán tính tổng thông qua phát biểu từ các bài toán thực tế trong ba cuốn sách toán Hán Nôm. Văn bản chữ Hán nói về bài toán tính tổng trong [1] - [3] đã được phân tích trong [12]. Một bài toán khác dẫn tới bài toán tính tổng là *bài toán bó vật*, cũng đã được trình bày trong [11].

Toán gò đống thể hiện sự trưởng thành của toán học Việt Nam thế kỉ XIX.

Mặc dù các công thức và kết quả trong sách toán Hán Nôm đã được giải mã (chứng minh) đầy đủ và chi tiết trong bài viết, vẫn còn một câu hỏi: Người xưa đã đi đến các công thức tính tổng (thí dụ, các công thức (9) – (12)) như thế nào? - Có thể khẳng định: Người xưa đã đi từ các công thức tính thể tích các hình để suy ra các công thức tính tổng (tương tự hóa). Hơn nữa, các công thức tính thể tích và công thức tính tổng thường được chứng minh nhờ phương pháp *cắt ghép hình*, chứ không chứng minh qui nạp như ngày nay. Ví dụ tính thể tích hình lăng trụ cụt và công thức tính tổng bình phương các số tự nhiên trên đây là những cơ sở cho khẳng định này.

Những bài toán tính tổng vẫn còn có ý nghĩa thực tế trong giảng dạy, thậm chí cho học sinh lớp 6. Tùy trình độ, có thể cho học sinh làm các bài tập với các số cụ thể (như các sách toán cổ, và đã được trình bày, phân tích trong bài), hoặc cho học sinh chứng minh các công thức tổng quát trước khi áp dụng vào các bài toán cụ thể.

Nghiên cứu lịch sử toán học cũng cho chúng ta thấy con đường phát triển của toán học và mối quan hệ của toán hoc với thực tế.

Tài liệu tham khảo

[1] Phạm Gia Kỷ, *Đại thành toán học chỉ minh*, khoảng 1840, Thư viện Viện nghiên cứu Hán Nôm, A.1555.

[2] Nguyễn Hữu Thận, *Ý Trai toán pháp nhất đắc lục*, 1829. Thư viện Viện nghiên cứu Hán Nôm, Vhv.1184.

[3] Tạ Hữu Thường, *Thống tông toán pháp*, Khoảng cuối thế kỉ XIX, Thư viện Quốc gia, Mã hiệu số hóa nlvnpf-0493, Mã kho R.1194

[4] Dương Huy, *Dương Huy toán pháp*, Quách Thư Xuân (chủ biên), Trung quốc khoa học kỹ thuật điển tịch thông vựng (Toán học - quyển 1), Nhà xuất bản giáo dục Hà Nam, Trung Quốc, 1993 (Chữ Hán).

[5] Trình Đại Vị, *Toán pháp thống tông*, Quách Thư Xuân (chủ biên), Trung quốc khoa học kỹ thuật điển tịch thông vựng (Toán học - quyển 2 - trang 1217-1346). Nhà xuất bản giáo dục Hà Nam, Trung Quốc, 1993 (Chữ Hán).

[6] Jean-Claude Marzloff, *History of Chinese Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 1997, 2006.

[7] Ngô Hân, *Công thức vạn năng*, Tạp chí *Toán học và Tuổi trẻ*, số 37 (tháng 10, 1967), trang 13-16.

[8] E. I. Berezina, Bản dịch và Chú giải *Cửu chương toán thuật* của Liu Hui (chữ Hán, thế kỉ III), in trong *Nghiên cứu lịch sử toán học*, Tập 10, Nhà xuất bản sách Khoa học, Moscow, 1957, trang 425-586 (tiếng Nga).

[9] Vữ Hữu Bình, *Toán 6,* Cơ bản và nâng cao, Tập 1, Nhà xuất bản Giáo dục, 2020 (Tái bản lần thứ 10).

[10] Tạ Duy Phượng, Phạm Vũ Lộc, Đoàn Thị Lệ, Cung Thị Kim Thành, Phan Thị Ánh Tuyết, *Bài toán xếp vật dựa tường trong ba cuốn sách Hán Nôm dẫn đến bài toán tính tổng của dãy số tự nhiên* Tạp chí *Toán Tuổi thơ*, Số 212+213 (3/9, 2020-2021), trang 54-57.

[11] Trần Đại An, Phạm Văn Hoằng, Đoàn Thị Lệ, Phạm Vũ Lộc, Tạ Duy Phượng, Cung Thị Kim Thành, Phan Thị Ánh Tuyết, *Bài toán bó vật trong hai cuốn sách Hán Nôm dẫn đến bài toán tính tổng của cấp số cộng* Tạp chí *Toán học và Tuổi trẻ*, Số 522 (12-2020), trang 33-36.

[12] Tạ Duy Phượng & nhóm nghiên cứu (Trần Đại An, Phạm Văn Hoằng, Đoàn Thị Lệ, Cung Thị Kim Thành, Phan Thị Ánh Tuyết), *Về các dạng toán tính số vật xếp đống trong ba cuốn sách Hán Nôm,* in trong *Nghiên cứu Hán Nôm năm 2020*, Nhà xuất bản sách Thế giới, 2020, trang 651-664.