

GIẢ THUYẾT KEPLER VÀ BÀI TOÁN XẾP CAM

Dương Đức Lâm
University of Sussex, United Kingdom

GIỚI THIỆU

Johannes Kepler là một nhà toán học, nhà thiên văn học nổi tiếng người Đức, người có những đóng góp nền tảng góp phần tạo nên cuộc cách mạng khoa học ở thế kỉ 17. Ngoài các định luật chuyển động của hành tinh được nhiều người biết đến, ông còn có nhiều đóng góp khác cho toán học, một trong số đó là giả thuyết Kepler, một trong những bài toán cổ xưa nhất của toán học. Bài viết này đề cập một số vấn đề xoay quanh giả thuyết Kepler và sự mở rộng của nó, bài toán xếp cam nhiều chiều, cũng như những tiến bộ đạt được trong thời gian gần đây.

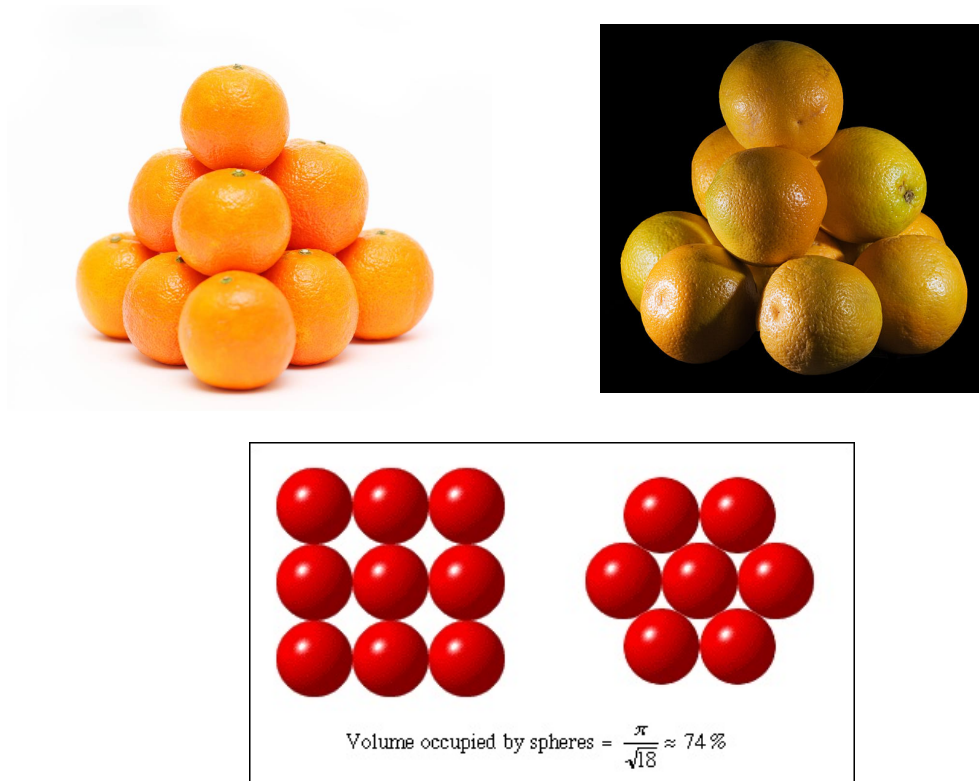
1. Giả thuyết Kepler và vài nét lịch sử

Rất nhiều bài toán khó và lâu đời của toán học được phát biểu rất đơn giản. Những ví dụ điển hình là bài toán bốn màu (được Francis Guthrie phát biểu lần đầu vào năm 1852), định lí cuối cùng của Fermat (được ghi lại năm 1637 bên lề một cuốn sách của Diophantus) hay nhiều giả thuyết liên quan đến số nguyên tố. Một ví dụ cũng nổi tiếng không kém, thậm chí còn lâu đời hơn, giả thuyết Kepler, được Johannes Kepler đưa ra vào năm 1611.

Câu chuyện được bắt đầu vào những năm cuối thập kỉ 90 của thế kỉ 16 [4]. Sir Walter Raleigh, một thủy thủ quý tộc người Anh, trong khi đang chuẩn bị cho một chuyến đi thám hiểm, đã hỏi người bạn và là trợ lý của mình là nhà toán học Thomas Harriot, làm thế nào để tính số lượng quả đạn cối được chứa trong một chiếc giỏ. Harriot đã đưa ra lời giải không mấy khó khăn. Tuy nhiên, vốn là một nhà toán học, ông đã đưa ra câu hỏi tổng quát hơn rằng, phải sắp xếp như thế nào để lượng đạn chiếm phần không gian ít nhất.

Sau chuyến đi, Harriot viết thư trao đổi với Kepler, một đồng nghiệp của ông lúc đó ở Praha (Cộng hòa Czech). Sau một thời gian nghiên cứu bài toán, Kepler đã xuất bản một cuốn sách nhỏ tựa đề "Strena Seu de Nive Sexangula"¹ (1611), trong đó mô tả hai cách sắp xếp các hình cầu trong không gian ba chiều: sắp xếp theo kiểu kim tự tháp (hay là kiểu lập phương tâm diện), và sắp xếp theo kiểu lục giác (xem Hình 1). Quan trọng hơn, ông nói rằng, đây là hai cách sắp xếp chặt nhất có thể, tuy nhiên lại không đưa ra chứng minh.

¹On the Six-Cornered Snowflake



Hình 1: Hai cách xếp cam chặt nhất. (Nguồn ảnh: Wikipedia and Plus Maths.)

Với cách xếp này, một độ chiếm không gian của các quả cam là

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} \simeq 74\%.$$

Giả thuyết Kepler nói rằng, tất cả các cách xếp khác đều có mật độ chiếm không gian không lớn hơn con số này.

Có một thực tế rằng, hầu như các cách sắp xếp trái cây ở các quầy bán hoa quả hay cách sắp xếp, chồng chất hàng hoá, đóng gói vật dụng có dạng hình cầu nói chung đều tuân theo quy tắc này² (xem Hình 2). Bởi thế mà giả thiết Kepler còn được gọi là bài toán xếp cam hay bài toán đóng gói hình cầu (sphere packing problem).

2. Thomas Hales và hành trình tìm kiếm lời giải

Khác với một số bài toán nổi tiếng khác, chẳng hạn bài toán bốn màu, mà trong nhiều năm liên chủ yếu chỉ nhận được sự quan tâm tìm kiếm lời giải từ các nhà toán học "amateur", giả thuyết Kepler được nhiều nhà toán học hàng đầu chú ý, trong đó có Newton và Gauss [5]. Nó được Hilbert đưa vào danh sách 23 bài toán nổi tiếng tại đại hội toán học thế giới năm 1900 và nằm ở vị trí số 18.

²Điều này cũng minh hoạ cho một quy luật tối ưu của tự nhiên: các hiện tượng tự nhiên luôn hướng đến trạng thái tối ưu nhất.



Hình 2: Cách sắp xếp hoa quả ở các quầy hàng tuân theo giả thuyết Kepler. (Nguồn ảnh: New Scientist.)

Năm 1990, nhà toán học Wu-Yi Hsiang ở Đại học Berkeley, California tuyên bố đã chứng minh được giả thuyết này và kết quả sau đó xuất hiện trên tạp chí *International Journal of Mathematics* (1993). Tuy nhiên, các nhà toán học, trong đó có Thomas Hales ở Đại học Michigan, sớm tìm ra lỗ hổng trong chứng minh của Hsiang và không chấp nhận kết quả này.

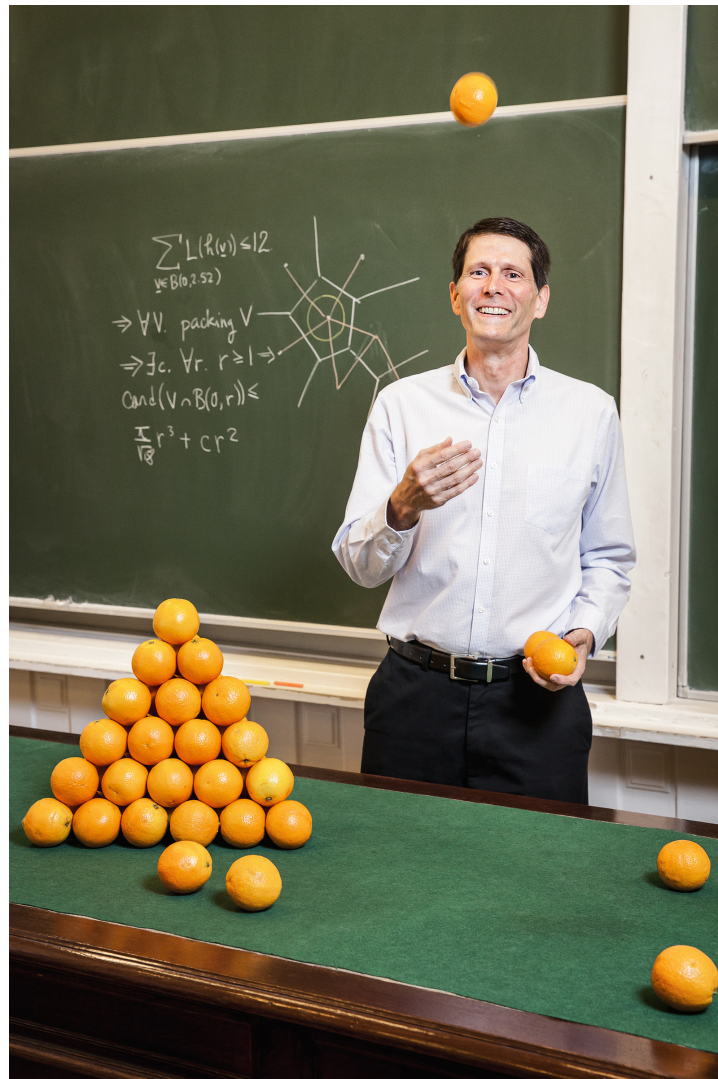
Những năm sau đó, Hales đã xây dựng một chương trình nhằm chứng minh giả thuyết Kepler với sự trợ giúp của máy tính. Đến năm 1998, Hales thông báo hoàn thành chứng minh và gửi bản thảo cho tạp chí *Annals of Mathematics*, được cộng đồng toán học thừa nhận rộng rãi là tạp chí uy tín nhất về toán, và cũng chỉ công bố những công trình tốt nhất. Trong thông báo sau đó của Hales trên *Notices of AMS*, một hội đồng bình duyệt gồm 12 người đã được thành lập để kiểm tra tính đúng đắn của chứng minh, đây là một điều ít có tiền lệ trong việc bình duyệt tạp chí, thông thường việc bình duyệt một bài báo chỉ có hai người, và những người bình duyệt thường được giấu tên.

Tuy nhiên, với riêng trường hợp này thì đây là điều khá dễ hiểu vì chứng minh của Hales dài tận 250 trang, chưa kể 3 gigabytes dữ liệu tính toán kèm theo. Nhất là sau khi có những tranh cãi xảy ra với chứng minh chưa hoàn thiện của Hsiang, họ phải cẩn thận. Quá trình bình duyệt kéo dài tới tận 4 năm, và sau cùng họ phải bỏ cuộc vì "hết năng lượng". Tạp chí *Annals of Mathematics* cuối cùng vẫn nhận đăng nhưng kèm theo chú thích rằng, các bình duyệt viên không thể kiểm tra được tính đúng đắn của chứng minh, và chỉ chắc chắn khoảng 99% là đúng. Một điều chưa từng có tiền lệ! Và nếu tính thời gian từ lúc ban biên tập nhận được bản thảo (9/1998) đến lúc nhận đăng (8/2005) cũng lên tới tận 7 năm, một điều khá hiếm thấy!

Không bằng lòng với sự chậm trễ lẫn kết luận của ban biên tập, Hales tiếp tục xây dựng một chương trình gọi là "Flyspeck"³ để kiểm tra tất cả các bước logic trong chứng minh bằng máy tính. Đây là một chương trình hợp tác toàn cầu, trong đó có một phần được thực hiện ở Viện Toán học, Hà Nội (xem [3]).

Sau hơn 10 năm nỗ lực không biết mệt mỏi, chương trình cũng đến lúc hái trái ngọt. Vào đầu tháng 8/2014, ngay trước thềm Đại hội Toán học Thế giới diễn ra ở Seoul, Hales thông báo chính thức rằng Flyspeck đã hoàn thành. Giả thuyết Kepler đã được chứng minh một cách hình thức.

³dựa trên những chữ cái đầu FPK của "Formal Proof of Kepler."



Hình 3: Thomas Hales. (Nguồn ảnh: Balin Thirling.)

Hơn bốn trăm năm sau khi ra đời, giả thuyết Kepler, bài toán lâu đời nhất của Hình học tổ hợp coi như đã được chứng minh hoàn toàn. Tuy nhiên, câu chuyện chưa dừng ở đây. Nhiều nhà toán học vẫn không hài lòng với lời giải này [8]. Bởi vì bản thân việc đúng hay sai của một giả thuyết đôi khi không có nhiều ý nghĩa bằng việc hiểu tại sao nó đúng (hay sai). Và điều cốt lõi là các ý tưởng nằm sau mỗi chứng minh có vai trò gì trong dòng chảy của toán học. Điều này hoàn toàn đúng với Định lý Fermat, vốn được mệnh danh là con gà đẻ trứng vàng của toán học, bởi vì quá trình tìm kiếm chứng minh cho nó đã góp phần tạo nên những lý thuyết toán học mới, và đó cũng là động lực thúc đẩy sự phát triển của toán học. Điều này thì Flyspeck không làm được. Dù sao, việc máy tính có thể giúp sức con người trong việc kiểm tra các thuật toán phức tạp, như với giả thuyết Kepler, hay đã từng xảy ra với bài toán bốn màu, cũng cho thấy những tiến bộ đáng kể của khoa học máy tính nói riêng và khoa học kỹ thuật nói chung.

3. Bài toán xếp cam n chiều

Bài toán tương ứng với giả thuyết Kepler, hay bài toán xếp cam, trong không gian n chiều cũng dành được nhiều sự quan tâm. Gọi ρ_n là mật độ lớn nhất của một cách xếp cam trong không gian n chiều. Theo giả thuyết Kepler thì

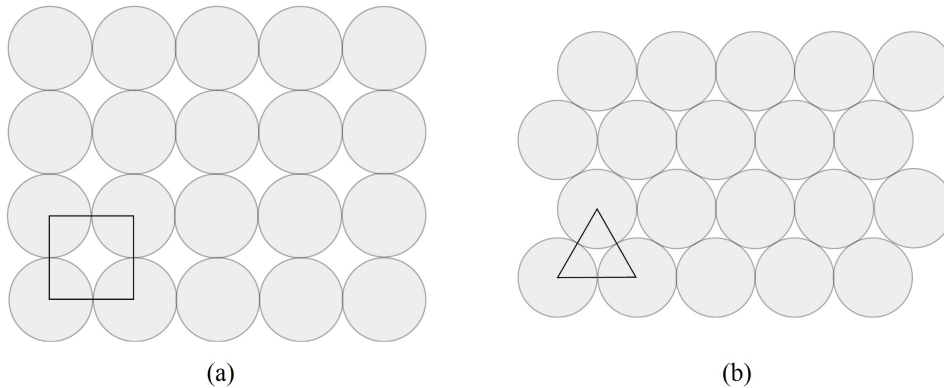
$$\rho_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \simeq 74\%.$$

Dưới đây, ta sẽ tìm hiểu một chút về các trường hợp khi $n \neq 3$.

3.1. $n = 1$ hoặc 2

Trong không gian một hay hai chiều, bài toán cũng đã được giải quyết tương đối dễ dàng. Trường hợp một chiều không có gì để bàn ("không gian" bây giờ là đường thẳng, mỗi "quả cam" là một đoạn thẳng), $\rho_1 = 1$. Trong trường hợp hai chiều ("không gian" ứng với mặt phẳng, "quả cam" ứng với hình tròn), xét hai cách xếp ở Hình 4 (a) và (b). Có thể tính toán được không mấy khó khăn mật độ chiếm không gian của các hình tròn ở hình (a) là $\frac{\pi}{4} \simeq 79\%$. Còn ở hình (b), mật độ này là lớn nhất và nó bằng

$$\rho_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \simeq 91\%.$$

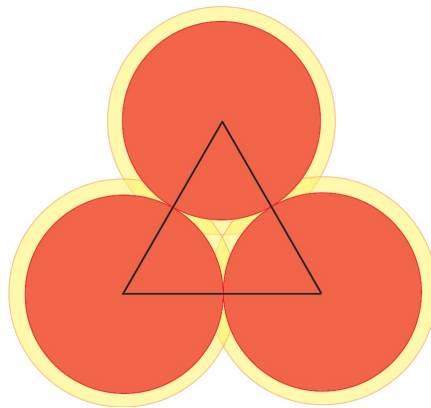


Hình 4: Bài toán xếp cam hai chiều.

Thật vậy, điều này có thể chứng minh dựa vào ý tưởng "chia để trị", biến mặt phẳng thành các miền địa phương, và trong mỗi miền, chứng minh rằng mật độ chiếm không gian của các hình tròn không vượt quá ρ_2 . Để đơn giản, xét một miền địa phương với ba hình tròn tiếp xúc nhau như ở Hình 6.

Trong miền tam giác tạo thành từ tâm của ba hình tròn, có một phần trống không được phủ. Nếu ta mở rộng các hình tròn bằng cách tăng bán kính của chúng lên một khoảng $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$ thì có thể thấy, không mấy khó khăn, các hình tròn đã phủ kín phần trống giữa chúng.

Bằng cách mở rộng các hình tròn một khoảng c một cách tương tự cho các miền bất kì, có thể chứng minh được rằng, trong bất kì trường hợp nào, mật độ chiếm không gian của các hình tròn cũng không vượt quá ρ_2 . Một chứng minh đầy đủ có thể tham khảo trong [9].



Hình 5

3.2. $n > 3$

Bây giờ, câu chuyện sẽ khác hẳn khi số chiều tăng lên, và có phần phức tạp hơn. Vào ngày 14 tháng 3 đầu năm nay, một nhà toán học trẻ người Ukraina, Maryna Viazovska, đã gây xôn xao cộng đồng toán học khi đưa lên arXiv một chứng minh rất độc đáo giải quyết bài toán xếp cam trong trường hợp $n = 8$. Kết quả mà Viazovska đưa ra cho trường hợp này là

$$\rho_8 = \frac{\pi^4}{2^4 \cdot 4!} \simeq 25.37\%.$$

Terence Tao, Đại học California, Los Angeles, đã nói về chứng dài chỉ 23 trang của Viazovska: "*Hai trong số những điều tôi rất thích của chứng minh này là: (a) nó sử dụng các kỹ thuật của giải tích Fourier để nhận được hằng số tốt nhất, và (b) nhân tử Fourier tối ưu được xây dựng nhờ sử dụng các dạng modular, một điều mà tôi không thể ngờ lại có liên quan tới bài toán xếp cam.*" Còn Peter Sarnak, Đại học Princeton và viện IAS, thì nhấn mạnh: "*Chứng minh đơn giản một cách đáng kinh ngạc, như những gì tuyệt vời nhất có thể!*".



Hình 6: Maryna Viazovska. (Nguồn ảnh: Trang web cá nhân.)

Rất nhanh sau đó, Maryna Viazovska cùng với các đồng nghiệp, bằng một bài báo khác [7] dài chỉ 12 trang, đã giải quyết tiếp trường hợp $n = 24$. Các kết quả của Viazovska và các cộng sự hiện (có thể) vẫn đang trong quá trình kiểm tra tính chính xác, nhưng nếu đúng, đây sẽ là một trong những thành tựu đáng chú ý nhất của Hình học tổ hợp trong năm nay. Và cũng như lời Thomas Hales đã nói, đây chính là những điều mà chúng ta đang chờ đợi.

4. Những chân trời rộng mở và lời kết

Giả thuyết Kepler đã được giải, một số kết quả riêng trong trường hợp chiều cao cũng được tìm ra. Vậy điều gì còn lại?

Lời giải của Thomas Hales cho giả thuyết Kepler, dù đã được chứng minh là đúng, thì vẫn chưa làm hài lòng các nhà toán học. Bởi như điều mà Paul Erdos vẫn hay tin tưởng, rằng mỗi bài toán đều có một lời giải đẹp đẽ nhất và được chứa trong cuốn sách của Chúa Trời. Vậy lời giải đẹp đẽ nhất (và không nhờ sự trợ giúp của máy tính) của giả thuyết Kepler liệu có tồn tại? Nếu tồn tại, nó là gì?

Ngoài ra, quay lại với cách xếp cam trong giả thuyết Kepler, để đạt được cách xếp tối ưu nhất, chúng ta phải xếp chúng một cách cẩn thận theo đúng các cách đã chỉ ra. Nhưng giả sử, chúng ta đang vội và chỉ có thể ném cam vào hộp một cách nhanh nhất có thể. Lúc này các quả cam sẽ rơi ngẫu nhiên vào hộp. Vậy mật độ chiếm thể tích hộp của các quả cam bây giờ có thể là bao nhiêu? Đây là bài toán đóng gói ngẫu nhiên. Các kết quả xoay quanh bài toán này vẫn còn nhiều chuyện đáng bàn.

Bây giờ giả sử ta không đi xếp cam nữa, mà xếp các đồ vật có dạng hình khối khác nhau. Lúc này mật độ chiếm thể tích của chúng sẽ có thể là bao nhiêu? Đương nhiên, kết quả sẽ phụ thuộc vào hình dạng của vật xếp. Trong [1], các tác giả đã đạt được một số trường hợp riêng cho trường hợp vật xếp có dạng ellipsoid. Tuy nhiên, các kết quả này vẫn còn khiêm tốn.

Rõ ràng, cùng với việc tìm kiếm lời giải cho các bài toán xếp cam chiều cao còn lại (hiện mới chỉ được giải cho $n = 1, 2, 3, 8$ và 24), xoay quanh bài toán này vẫn còn nhiều điều thú vị chờ chúng ta khám phá. Hy vọng, sau những thành tựu gây nức lòng của Viazovska, chúng ta sẽ sớm được biết thêm nhiều điều bí ẩn xung quanh bài toán này.

Tài liệu

- [1] A. Donev, I. Cisse, D. Sachs, E. Variano, F. H. Stillinger, R. Connelly, S. Tarquato and P.M. Chikin, Improving the density of jammed disordered packings using ellipsoids, *Science*, 303 (2004), 990–993.
- [2] Frank Morgan, Kepler’s Conjecture and Hales’s Proof, A Book review, *Notices of AMS*, Vol 52, Issue 1, 2005.
- [3] Hoàng Lê Trường, Giả thuyết Kepler đã được chứng minh một cách hình thức, *Thông tin Toán học*, VMS, Tập 19, Số 1, 2015.

- [4] George G. Szpiro, *Kepler's Conjecture: How Some of the Greatest Minds in History Helped Solve One of the Oldest Math Problems in the World*, John Wiley & Sons, New York, 2003.
- [5] Doron Zeilberger, To Prove the Optimal Packing, *Science*, Vol. 301, Issue 5637, pp. 1186.
- [6] Maryna Viazovska, The sphere packing problem in dimension 8, [arXiv:1603.04246](#).
- [7] Henry Cohn, Abhinav Kumar, Stephen D. Miller, Danylo Radchenko, Maryna Viazovska, The sphere packing problem in dimension 24, [arXiv:1603.06518v1](#).
- [8] <https://vuhavan.wordpress.com/2015/05/30/xep-cam/>
- [9] <http://blog.kleinproject.org/?p=742>
- [10] <https://www.quantamagazine.org/20160330-sphere-packing-solved-in-higher-dimensions/>