CÁC BÀI TOÁN ĐOÁN BÀI

Đặng Nguyễn Đức Tiến
(Đại học Trento, Italy)

Sân khấu bừng sáng trong tiếng hò reo vang dội.

Và nhà ảo thuật hiện ra, sang sảng nói.

"Các bạn, các bạn của tôi ơi, trò ảo thuật bài hay nhất đêm nay đang chờ đợi. Đây, hãy chọn 5 lá bài ngẫu nhiên. Chọn nào, bạn tôi ơi, ngẫu nhiên cũng được hay suy tư cẩn trọng đều cũng chẳng sao.

Chọn đi nào, thật kín đáo khỏi mọi con mắt thế gian.

Lựa chọn xong hãy giao cho người trợ lý của tôi những lá bài của bạn. Rồi anh ta sẽ đưa lại bốn lá trong số đó cho tôi.

Xem nào, từng lá một:

Bảy bích, đầm cơ, tám chuồng, cuối cùng là ba rô.

Giờ trên tay người trợ lý chỉ còn lại một, duy nhất một lá mà thôi. Một lá bài mà chỉ anh ta và người lựa chọn biết là gì.

Nhưng con mắt của nhà ảo thuật, đọc được thấu tâm can.

Bạn tôi ơi, đó chính là già bích!"

1. Năm lá bài của Fitch Cheney

Tiếp nối những số trước, chuyên mục giải trí kỳ này trân trọng giới thiệu với độc giả một loạt các bài toán đố, và kỳ này là các bài toán đoán bài. Như thường lệ, chúng tôi bắt đầu chuyên mục bằng bài toán kinh điển nhất và bài toán khởi đầu của lần này là bài toán năm lá bài của Fitch Cheney. Bài toán lần đầu tiên được in trong quyển Math Miracle của tác giả Wallace Lee vào năm 1950. Trong quyển này, tác giả đã ghi nhận tác giả bài toán là William Fitch Cheney (1894 - 1974), vẫn được gọi một cách thân mật là Fitch - nhà ảo thuật. Theo tác giả, trò ảo thuật này được Fitch sáng tạo vào khoảng những năm 1920 và chúng tôi đã mượn chi tiết này để viết lại thành lời tựa cho chuyên mục kỳ này. Để đơn giản hơn cho việc tiếp cận bài toán, chúng tôi phát biểu lại bài toán ở dạng toán đố như sau:

Hai người A và B tham gia một trò chơi như sau: A được nhận ngẫu nhiên 5 lá bài từ bộ bài chuẩn 52 lá và B không biết A nhận những lá bài nào. Sau khi xem xong, A được phép giữ lại 1 lá tùy ý và đưa lần lượt 4 lá còn lại cho người quản lý trò chơi. Người quản lý sẽ lần lượt đặt các lá bài vào các vị trí được đánh số cho trước từ 1 đến 4. B nhìn vào 4 lá bài đó của A và được yêu cầu đoán lá bài còn lại, nếu đoán đúng, họ thắng trò chơi, nếu đoán sai, họ thất bại. Tìm chiến thuật cho 2 người để họ luôn luôn chiến thắng.

Thoạt nhìn, điều này là không thể vì với 4 lá bài, chúng ta chỉ có thể tổ hợp thành $4! = 24$ trường hợp khác nhau, trong khi bộ bài chuẩn có 52 lá. Tuy nhiên, với một chút mày mò và kiên nhẫn, hẳn bạn đọc sẽ nhanh chóng tìm ra cách thức để khám phá ra bí mật đoán bài của nhà ảo thuật.

Ở đây, chúng tôi giới thiệu một cách giải đơn giản như sau:

- Vì có 5 lá bài, nên chắc chắn tồn tại ít nhất 2 lá bài đồng chất (cùng là cơ, cùng rô, cùng chuồn hoặc cùng bích). Gọi 2 lá này là M và N.

- Vì mỗi chất bài có 13 lá khác nhau, nên ta luôn tìm được cách 'đếm tới' để khoảng cách của 2 lá tối đa là 6 (và tối thiểu là 1 do M và N cùng chất, không thể bằng nhau). Ví dụ nếu $M = 7$ và $N =$Bồi thì khoảng cách là 4 vì sau 7 là 8, 9, 10 và bồi, 4 lá. Nếu $M =$ bồi và N bằng 3 thì khoảng cách là 5 vì sau bồi là đầm, già, át, hai, ba, 5 lá. Không mất tính tổng quát, ta gán M cho lá đầu tiên và N là lá được 'đếm tới'.

- Chiến thuật là giữ lại lá N và đặt lá M ở vị trí số 1. 3 lá còn lại, luôn có thứ tự lớn nhỏ ngầm định trước (ví dụ thứ tự chơi tiến lên như cơ lớn hơn rô, rô lớn hơn chuồn..) nên có thể tạo thành 6 hoán vị khác nhau, mỗi hoán vị ứng với 1 số cho biết khoảng cách của M và N.

- Như vậy, với cách hoán vị 3 lá còn lại ở vị trí $2, 3, 4$ và lá đầu tiên là lá M, ta biết được chất của N và khoảng cách từ M đến N, nên xác định được N.

Liệu rằng ta có thể làm tốt hơn, nghĩa là có thể tìm ra lá bài bằng 4 lá còn lại trong một bộ bài lớn hơn, ví dụ 100 lá thay vì chỉ 52 lá chẳng hạn?

Hãy quay lại trò ảo thuật với cái nhìn toán học hơn một chút: chúng ta hãy xem một bộ 4 lá nhận được từ trợ lý là một thông điệp, do vậy có $52 \times 51 \times 50 \times 49$ thông điệp khác nhau. Nhà ảo thuật thấy 4 lá bài và phải đoán lá còn lại, điều này nghĩa là nhà ảo thuật chỉ cần phải đoán trong tổ hợp chập 5 của 52 trường hợp. Vì $\binom{52}{5} = 52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48/5!$ nên số lượng thông điệp mà nhà ảo thuật nhận được là quá dư so với số trường hợp, gấp $5!/48 = 2.5$ lần. Và thật sự là ta có thể giải quyết bài toán với 124 lá bài chứ không phải chỉ với 52 lá.

Chiến thuật cụ thể để với 4 lá bài có thể tìm ra lá còn lại trong số 124 lá bài chúng tôi xem như một bài tập dành cho độc giả. Gợi ý: dựa trên số dư khi chia cho 5.

Tổng quát hóa bài toán, cho m lá bài lấy từ n, có thể chọn giữ lại $m - 1$ lá để từ đó xác định đượcn lá còn lại khi và chỉ khi $n \leq m! + m - 1$.

Tiếp tục mở rộng, với bộ ba (m, n, k), $n > m > k$, với m lá bài lấy ra từ bộ bài n lá, có thể chọn giữ lại k lá sao cho từ đó xác định được $m - k$ lá còn lại khi và chỉ khi:

$$\binom{n}{m} \leq n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$

Với bài toán 5 lá bài của Fitch Cheney tương đương bộ 3 $(52, 5, 4)$.
Việc chứng minh chi tiết kết quả này nằm ngoài khuôn khổ của một bài toán giải trí, chúng tôi chỉ giới thiệu ý vắn tắt thông qua lý thuyết đồ thị như sau: Xét một đồ thị hai phía G với hai tập phân biệt S và T trong đó S là tập tất cả các bộ m lá bài lấy từ n lá và T là tập tất cả các cách sắp xếp k lá. Một cặp ghép trên đồ thị G chính là chiến thuật cần tìm. Theo định lý König-Egerváry,

độ lớn cực đại của một cặp ghép trên đồ thị hai phía bằng đúng kích thước của tập đỉnh phủ nhỏ nhất (có thể dẫn về bài toán luồng cực đại - lát cắt cực tiểu), và điều kiện tối ưu sẽ đạt được khi $|S| = |T|$.

2. Bài toán 55 lá bài

Trong loạt 3 bài toán tiếp theo, chúng tôi sẽ trích chọn giới thiệu từ tác giả quen thuộc của chuyên mục toán học giải trí, Stan Wagon qua các bài toán số 922, 1219, và 1223.

Và đây, bài toán 922, bài toán 55 lá bài:

> Có 55 lá bài, được gán các số khác nhau từ 1 đến 55 và đặt ngẫu nhiên, úp mặt, thành vòng tròn. Cứ mỗi lần ta sẽ được lật một lá bài và xem số trên đó. Tìm chiến thuật lật bài ít nhất sao cho tìm được 1 lá bài chắc chắn có giá trị lớn hơn lá bài bên trái và bên phải của nó.

Bài toán này được Stan Wagon giới thiệu năm 2000, và theo ông nó bắt nguồn từ bài toán Sharygin đăng trên trang cut the knot.

Đáp án của bài toán là cần tối đa 10 lần mở bài, ta sẽ luôn tìm được một lá có giá trị lớn hơn hai lá hai bên.

Chúng tôi giới thiệu ở đây một lời giải như sau:

- Gọi $f(x)$ là giá trị của lá bài tại vị trí x. Khi đó, xét một bộ 3 vị trí (m, n, k) bất kỳ, ta luôn tìm được một lá bài lớn hơn 2 lá còn lại. Không mất tính tổng quát, giả sử lá bài đó là n, lá bên trái là m và bên phải là k (do các lá bài xếp thành vòng tròn nên ta luôn tìm được bộ 3 thỏa mãn điều kiện này). Khi đó $f(m) < f(n)$ và $f(n) > f(k)$. Ta gọi một bộ 3 có tính chất như vậy là tính chất S, nghĩa là lá ở giữa có giá trị lớn hơn 2 lá bên trái và phải.

- Giả sử $|n - m| > 1$, nghĩa là 2 lá m và n không nằm kế nhau. Chọn một lá t bất kỳ ở giữa m và n. Có hai trường hợp: Nếu $f(t) > f(n)$, ta có bộ 3 (m, t, n) có tính chất S. Nếu $f(t) < f(n)$, ta có bộ 3 (t, n, k) có tính chất S. Như vậy, dù ở trường hợp nào thì bộ 3 mới tạo với t đều có các chỉ số gần hơn so với bộ 3 (m, n, k). Và cứ làm như vậy, cuối cùng ta sẽ thu được một bộ 3 mà khoảng cách các lá bằng 0, hay nói cách khác, là 3 lá liên tục thỏa mãn tính chất S, cũng chính là yêu cầu của đề bài.

- Tiếp tục đơn giản hóa, với mỗi bộ (m, n, k) ta có khoảng cách giữa các lá là $\{n-m-1, k-n-1\}$, tức là số lá bài ở giữa các lá của bộ 3 này. Như vậy mục tiêu của bài toán là tìm ra bộ 3 có khoảng cách $\{0, 0\}$.

- Để rút về được $\{0, 0\}$ trong tình huống xấu nhất thì trước đó sẽ là $\{0, 1\}$ (chúng ta đang xét trong tình huống xấu nhất, không quan tâm đến may rủi). Lần ngược tiếp tục, ta có bộ lớn nhất trong tình huống xấu nhất có thể đưa về $\{0, 1\}$ là $\{1, 2\}$. Lưu ý, ở đây, không mất tính tổng quát, ta thấy khoảng cách trái hay phải là như nhau, nghĩa là $\{1, 2\}$ tương ứng với $\{2, 1\}$.

- Tiếp tục lần ngược ta có: $\{0, 0\} \leftarrow \{0, 1\} \leftarrow \{1, 2\} \leftarrow \{2, 4\} \leftarrow \{4, 7\} \leftarrow \{7, 12\} \leftarrow \{12, 20\}$.

- Như vậy, khởi điểm ta có thể chọn lá bài a bất kỳ, sau đó chọn lá bài b cách a 12 lá bài ở giữa, và sau đó chọn tiếp lá bài c cách b 20 lá. Khi đó, ta có nếu $f(a)$ hoặc $f(b)$ là lá lớn nhất trong 3 lá thì ta chỉ mở thêm tối đa 6 lá nữa là sẽ chắc chắn đưa về được $0, 0$. Nếu $f(c)$ lớn nhất, ta tốn thêm một lần mở để đưa $20, 20$ về $12, 20$. Trường hợp này ta cần tối đa 7 lần mở bài.

- Vậy trong tình huống xấu nhất, ta tốn tối đa 10 lần mở bài.

Và, với cách làm như trên, nếu để ý ta sẽ thấy số lá bài tối đa với n lần lật bài ta sẽ chắc chắn tìm được một lá bài có giá trị lớn hơn hai lá bên cạnh chính là số Fibonacci thứ n.

3. Bài toán 1219

Bài toán này được Stan Wagon phát biểu như là một bài toán về cai ngục, ở đây chúng tôi phát biểu lại với dạng trò chơi đoán bài, như sau:

A và B tham gia một trò chơi với luật như sau:

A và B được mời vào một phòng riêng để chờ gọi ra tham gia trò chơi.

Đầu tiên, người dẫn trò sẽ mời A ra và cho A xem một bộ bài chuẩn 52 lá được xếp ngửa mặt thành một hàng. Sau khi xem xong, A có quyền chọn 2 lá bài bất kỳ, nếu muốn và đổi chỗ 2 lá này. Sau đó, người dẫn trò lật úp lại toàn bộ các lá bài (giữ nguyên thứ tự) lại và mời B ra. Người dẫn trò sẽ nói tên một lá bài T tùy ý, và cho phép B lật các lá bài lên để tìm ra lá bài T này. Nếu sau tối đa 26 lần lật bài B tìm được lá bài T, họ chiến thắng trò chơi. Ngược lại, nếu sau 26 lần lật bài mà B không tìm ra lá T, họ thất bại.

A và B trong quá trình chơi không được có bất cứ trao đổi gì với nhau, và họ chỉ được trao đổi chiến thuật với nhau trước khi chơi. Hãy chỉ ra chiến thuật cho A và B để họ luôn có thể thắng trò chơi.

Số 26 trong đề bài là một trong những gợi ý quan trọng trong việc tìm ra chiến thuật. Trong phần này, chúng tôi giới thiệu một chiến thuật dựa trên chu trình như sau:

- Đầu tiên A và B ngầm định đánh số các lá bài từ 1 đến 52. Khi B được người dẫn trò cho biết lá cần tìm là lá bài T, B sẽ mở lá ở vị trí T. Nếu lá đó đúng là lá T, B đã tìm ra và dừng. Ngược lại, nếu lá đó có giá trị $f(T) \neq T$, B sẽ mở tiếp lá bài ở vị trí $f(T)$ tương ứng và tiếp tục như vậy cho đến khi gặp T.

- Một chuỗi các lá bài như vậy (bắt đầu từ một vị trí x, sau đó mở tiếp vị trí $f(x)$ trên lá bài tại x và tiếp tục cho đến khi gặp lá x), được gọi là một chu trình. Và vì toàn bộ bộ bài chỉ có 52 lá, nên chỉ có thể tồn tại nhiều nhất một chu trình có độ dài hơn $52/2 = 26$. Do vậy, chiến thuật của A là tìm ra chu trình dài hơn 26, nếu có, và đổi chỗ 2 lá bài để cắt ngắn chu trình này thành 2 chu trình không vượt quá 26.

- Việc "cắt" chu trình của A thực hiện khá đơn giản như sau: không mất tính tổng quát, giả sử chu trình dài hơn 26 là $1 - 2 - 3 - \cdots - N$ (nghĩa là $f(1) = 2, f(2) = 3, \ldots, f(N) = 1$), lúc này ta chỉ đơn giản hoán đổi vị trí lá thứ 26 và lá thứ N thì ta sẽ có 2 chu trình ngắn hơn là $1 - 2 - 3 - \cdots - N$ và $27 - 28 - \cdots - 26$.

Một câu hỏi khó hơn được chúng tôi xem như một bài tập dành cho độc giả là với cách làm như chiến thuật ở trên, kỳ vọng để B tìm ra lá bài T ngẫu nhiên bất kỳ trong số 52 lá bài $E(52)$ là bao nhiêu? Và tổng quát với n lá bài thì kỳ vọng $E(n)$ là bao nhiêu? Ví dụ ta có $E(2) = 1$, $E(3) = 11/9$.

4. Bài toán 1223

Bài toán cuối cùng mà chúng tôi giới thiệu ở chuyên mục lần này là một phát triển của bài toán trước, phát biểu như sau:

A và B tham gia một trò chơi với luật như sau:

A và B được mời vào một phòng riêng để chờ gọi ra tham gia trò chơi.

Đầu tiên, người dẫn trò sẽ mời A ra và cho A xem 5 lá bài, đánh số từ 1 đến 5 và được xếp ngửa mặt thành một hàng. Sau khi xem xong, A có quyền chọn 2 lá bài bất kỳ, nếu muốn và đổi chỗ 2 lá này. Sau đó, người dẫn trò lật úp lại toàn bộ các lá bài (giữ nguyên thứ tự) lại và mời B ra. Người dẫn trò sẽ nói ngẫu nhiên một số nguyên T tùy ý trong khoảng từ 1 đến 5 và yêu cầu B tìm lá bài có số tương ứng trong số các lá bài đang lật úp. Nếu sau đúng 1 lần lật bài B tìm được lá bài T, họ chiến thắng trò chơi. Ngược lại, họ thất bại.

A và B trong quá trình chơi không được có bất cứ trao đổi gì với nhau, và họ chỉ được trao đổi chiến thuật với nhau trước khi chơi. Hãy chỉ ra chiến thuật cho A và B để khả năng chiến thắng trò chơi là cao nhất.

Ta có thể thấy nếu B chọn ngẫu nhiên 1 lá, không quan tâm đến A, khả năng họ thắng trò chơi là $1/5$. Nếu A luôn luôn đổi chỗ lá bài sao cho lá 1 sẽ nằm ở vị trí 1 và chiến thuật của B là nếu $T = 1$ thì sẽ mở lá ở vị trí 1, ngược lại mở ngẫu nhiên các lá ở vị trí từ 2 đến 5. Lúc này, xác suất chiến thắng là $2/5 = 40\%$.

Nếu A và B sử dụng chiến thuật cắt chu trình như ở bài toán trước, xác suất chiến thắng của họ là bao nhiêu? Ta thấy, với chiến thuật ngày thì B sẽ mở lá bài ở vị trí T khi người dẫn trò cho biết là cần tìm là T. Stan Wagon, do vậy, ký hiệu cho chiến thuật này là (12345) ứng với các vị trí sẽ mở bài tương ứng. Chiến thuật của A như sau: nếu A gặp 1 cặp bị hoán đổi vị trí, A sẽ hoán đổi vị trí cặp này lại cho đúng. Ngược lại (nghĩa là không có cặp bị hoán đổi vị trí), A sẽ tìm chu trình có độ dài $k \geq 3$ và cắt thành chu trình này, nếu có, thành chu trình ngắn hơn có độ dài $k - 1$ và một lá rời. Dễ thấy, nếu không có chu trình k, các lá bài đã nằm đúng vị trí từ 1 đến 5. Với cách làm này có tất cả 284 trường hợp B sẽ tìm đúng lá T trong số 5.5! khả năng, do vậy xác suất để họ thắng trò chơi là $\frac{284}{5.5!Ư} = 47\frac{1}{3}\%$, lớn hơn $7\frac{1}{3}\%$ so với cách làm ở trên.

Stan Wagon đưa ra cách tìm công thức tổng quát để tính số trường hợp thành công $f(n)$ với n lá bài với chiến thuật này là:

$$f(n) = 2.n! - 1 + T(n)$$

với $T(n)$ là số lượng các hoán vị của n số nguyên đầu tiên trong đó có tồn tại ít nhất một cặp bị hoán đổi vị trí. Một vài giá trị $T(n)$ đầu tiên là 0, 1, 3, 9, 45, 285, 1995. Trong trường hợp đầu bài $n = 5$, ta có $f(5) = 2.5! - 1 + T(5) = 2.120 - 1 + 45 = 284$. Chứng minh chi tiết của T(n) và f(n) có thể xem thêm tại trang nhà của Stan Wagon.

Tuy nhiên, công thức tổng quát ở trên không phải là điểm thú vị của bài toán mà là kết quả bất ngờ sau đây: chiến thuật (11345) sẽ có khả năng thành công cao hơn chiến thuật (12345)! Và đây cũng chính là chiến thuật tối ưu. Chiến thuật này tóm tắt đơn giản là sau khi nghe người dẫn trò nói lá bài T, B sẽ lật lá bài ở vị trí T tương ứng, trừ trường hợp $T = 2$ thì B sẽ lật lá bài ở vị trí 1.

Tổng số khả năng thành công theo chiến thuật này là 286 và do vậy xác suất thắng lợi là $47\frac{2}{3}\%$, cao hơn $\frac{1}{3}\%$ so với chiến thuật (12345). Chiến thuật này được Stan gọi là double-door (cửa đôi).

Một câu hỏi mở vẫn chưa được giải đáp là với bộ bài chuẩn 52 lá, chiến thuật nào là tốt nhất? Và với n tổng quát? Hiện tại, kết hợp khảo sát bằng máy tính, Stan Wagon, tác giả của bài toán cũng chỉ mới chứng minh và đề xuất được cách làm tối ưu cho n trong phạm vi từ 1 đến 10.

Tham khảo và trích dẫn

Độc giả có thể tham khảo chi tiết hơn cho các bài toán giới thiệu ở chuyên mục lần này ở các địa chỉ và tài liệu sau:

1. Các bài toán của Stan Wagon tại http://mathforum.org/wagon/

2. Kleber, M., The Best Card Trick. Mathematical Intelligencer, 24 (2002).

3. Simonson, S. and Holm, T., Using a Card Trick to Teach Discrete Mathematics. Primus: Problems, Resources and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 13 (2003):248-269.